Le but de cet ouvrage est d'exposer les problèmes de façon qu
l'attention du lecteur se concentre sur les applications pratiques
sujet traité.

Le premier volume traite spécialement les matières habituellem
enseignées dans les cours de Résistance des matériaux des éco
d'ingénieurs, avec des calculs assez simplifiés pour les mettre à
portée d'un étudiant ayant les connaissances mathématiqu
usuelles. La méthode du moment des aires est utilisée pour le calc
de la ligne élastique, la méthode de superposition pour l'étude d
systèmes statiquement indéterminés, le cercle de Mohr pour ex
quer les contraintes associées.

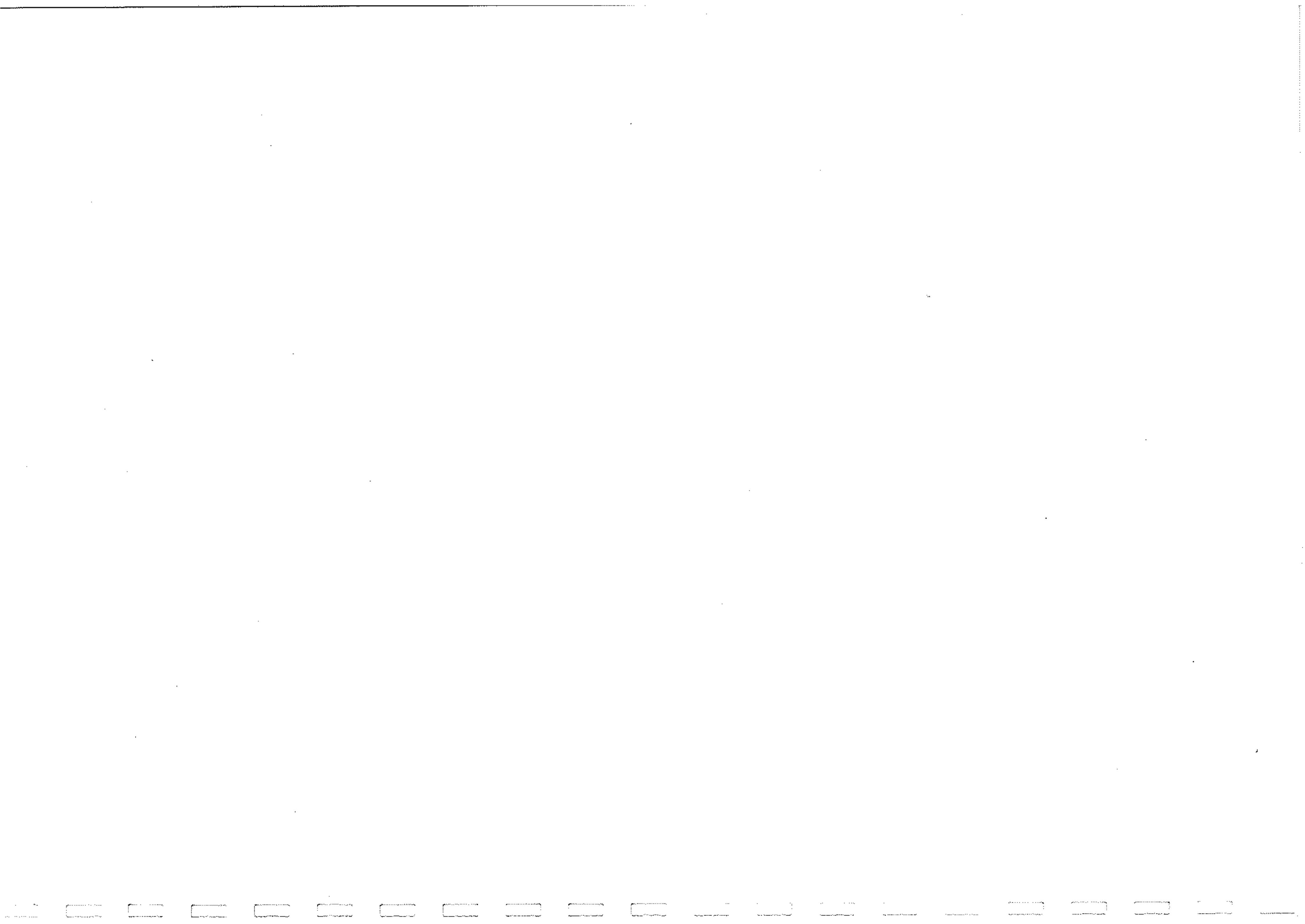
Le second volume contient les parties du sujet plus spécialisées
qui intéressent principalement les ingénieurs diplômés et les cha
cheurs; une grande partie est consacrée aux méthodes de réso
tion des problèmes d'élasticité fondés sur l'énergie de déformat
des corps élastiques; on y étudie aussi les contraintes dues a
chocs.

Un grand nombre de problèmes pratiques sont accompagnés d
leurs solutions.

Résistance des matériaux

Tome 1

S.P. Timoshenk



RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX

S. TIMOSHENKO
Professeur honoraire de Mécanique appliquée
à l'Université de Stanford

Traduit d'après la troisième édition américaine par
Robert PINTO

TOME I

THÉORIE ÉLÉMENTAIRE ET PROBLÈMES

NOUVEAU TIRAGE

dunod

L'édition américaine a paru sous le titre

Strength of Materials

chez

D. VAN NOSTRAND COMPANY, INC.

Princeton, New Jersey

ISBN. 2.04.010268.X

AVANT-PROPOS

Depuis quelques dizaines d'années on a pu assister à un changement radical dans l'attitude des ingénieurs vis-à-vis de l'application des méthodes analytiques dans la résolution des problèmes qui leur sont posés. Une étude n'est plus fondée principalement sur des formules empiriques. En général, on admet de plus en plus l'importance des méthodes analytiques, doublées des expériences en laboratoire, pour la résolution des problèmes techniques.

Les types de machines et de constructions changent très rapidement dans les nouveaux domaines de l'industrie, et généralement le temps ne permet pas l'accumulation des données empiriques nécessaires. Les dimensions et les prix augmentent constamment, ce qui crée, par conséquent, une exigence sévère quant à une plus grande sécurité dans les constructions. Le facteur économique, dans un projet, occupe une place prépondérante étant donné les conditions présentes de concurrence. La construction doit être suffisamment solide et sûre, elle doit aussi être réalisée avec la plus grande économie possible de matériaux. Avec de telles exigences, le travail de l'ingénieur devient extrêmement difficile. La réduction du poids implique une augmentation des contraintes d'utilisation, lesquelles ne sont admises, dans des conditions de sécurité, que sur la base d'une étude prudente de la distribution des contraintes dans la construction et d'une recherche expérimentale sur les propriétés mécaniques des matériaux employés.

Le but de cet ouvrage est d'exposer les problèmes de manière que l'attention du lecteur se concentre sur les applications pratiques du sujet traité. Si ce but était atteint et s'il en résultait, dans une certaine mesure, une corrélation accrue entre les études de la résistance des matériaux et les projets de construction, un important pas en avant aurait été fait.

L'ouvrage se divise en deux volumes. Le premier volume traite spécialement les matières qui sont habituellement enseignées dans les cours de résistance des matériaux des écoles d'ingénieurs. Le second volume contient les parties du sujet les plus spécialisées, elles intéressent principalement les étudiants diplômés et les ingénieurs chercheurs. Ce dernier volume tient compte des récents développements d'importance pratique dans le domaine de la résistance des matériaux.

En rédigeant le premier volume, nous avons pris garde, autant que possible, de simplifier tous les calculs afin qu'un étudiant, ayant des connaissances mathématiques usuelles, soit en mesure de le lire sans difficultés. Par exemple, pour le calcul de la ligne élastique, nous avons largement utilisé la *méthode du moment des aires*. De cette manière, une grande simplification a été apportée dans le

calcul des flèches des poutres, pour différentes conditions de sollicitation et d'appuis. Pour l'étude des systèmes statiquement indéterminés, l'on a utilisé la *méthode de superposition* qui se révèle très efficace dans les problèmes traitant des poutres continues et des cadres. Pour expliquer les contraintes associées et calculer les contraintes principales, nous nous sommes servi du *cercle de Mohr* qui apporte une simplification substantielle dans l'exposé de cette partie de la théorie.

Grâce à ces méthodes simplificatrices de l'exposé, l'auteur a été en mesure de condenser le sujet traité et d'étudier certains problèmes d'un caractère plus avancé, qui sont généralement l'objet du second volume. Par exemple le cas des sections transversales non symétriques dans la théorie de la flexion, la notion de noyau central d'une section, les cas particuliers d'application du théorème de Castigliano. Une grande partie de l'ouvrage est consacrée aux méthodes de résolution des problèmes d'élasticité fondées sur l'énergie de déformation des corps élastiques. On étudie aussi les contraintes dues aux chocs. Tous ces problèmes complexes sont imprimés en petits caractères et peuvent être sautés lors d'une première lecture.

Un grand nombre de problèmes sont accompagnés de leurs solutions. Dans plusieurs cas, les problèmes sont choisis de manière à étendre le domaine englobé par le texte et à illustrer l'application de la théorie dans la résolution de problèmes de constructions. Il faut espérer que ces problèmes présenteront un intérêt pour les étudiants et seront aussi utiles aux constructeurs.

L'auteur saisit cette occasion pour remercier ses amis qui l'ont aidé par leurs suggestions, par la lecture du manuscrit et des épreuves ; il remercie particulièrement MM. W. M. Coates et L. H. Donnell, professeurs de mathématiques et de mécanique au College Engineering de l'Université du Michigan, M. F. L. Everett du service de recherches du Génie Civil de l'Université du Michigan et le professeur James M. Gere de l'Université de Stanford. Il est aussi redevable à M. F. C. Wilharm pour l'exécution des figures, à Mme E. D. Webster qui a dactylographié le manuscrit, et à l'éditeur pour le soin qu'il a apporté à la fabrication de cet ouvrage.

NOTATIONS

α	Angle, coefficient de dilatation thermique, coefficient numérique
β	Angle, coefficient numérique
γ	Déformation de cisaillement, poids spécifique
Δ	Unité de dilatation volumétrique, distance
δ	Allongement total, flèche totale, distance
ε	Déformation unitaire
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	Déformations unitaires suivant x, y, z
θ	Angle, angle de torsion par unité de longueur d'arbre
μ	Coefficient de Poisson
σ	Contrainte normale unitaire
σ_1, σ_2	Contraintes principales
σ_n	Contrainte normale unitaire sur un plan perpendiculaire à la direction n
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Contraintes normales unitaires sur des plans perpendiculaires aux axes x, y et z
σ_U	Contrainte de rupture
σ_W	Contrainte d'utilisation
$\sigma_{Y.P.}$	Contrainte de limite d'allongement
τ	Contrainte de cisaillement unitaire
$\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$	Contraintes de cisaillement unitaires sur des plans perpendiculaires aux axes x, y, z, et parallèles à ces mêmes axes
τ_W	Contrainte d'utilisation de cisaillement
$\tau_{Y.P.}$	Limite d'allongement due à la contrainte dans le cisaillement
φ	Angle
ω	Vitesse angulaire
A	Aire d'une section transversale
a, b, c, d	Distances
C	Rigidité à la torsion, constante d'intégration
D, d	Diamètres
E	Module d'élasticité
G	Module d'élasticité dans le cisaillement.
H	Force horizontale, cheval-vapeur

h	Hauteur, épaisseur
I_p	Moment d'inertie polaire d'une aire plane
I_y, I_z	Moments d'inertie d'une aire plane par rapport aux axes y et z
I_{yz}	Produit d'inertie d'une aire plane par rapport aux axes y et z
K	Module d'élasticité volumétrique
k	Constante d'élasticité, facteur numérique
k_y, k_z	Rayons de giration d'une aire plane par rapport aux axes y, z
l	Longueur, portée
M	Moment fléchissant
M_t	Couple
n	Coefficient de sécurité, révolutions par minute, normale à un plan
P, Q	Forces concentrées
p	Pression, pourcentage d'acier des poutres en béton armé
q	Charge par unité de longueur, pression
R	Réaction, effort, rayon
r	Rayon, rayon de courbure
S	Effort axial dans une barre
t	Température, épaisseur
U	Energie de déformation
u	Flèche, distance
V	Volume, effort tranchant
v	Vitesse, flèche, distance
W	Charge totale, poids
w	Poids par unité de longueur, énergie de déformation par unité de volume
w_1	Energie de déformation par unité de poids
X, Y, Z	Efforts axiaux dans les barres, réactions inconnues
x, y, z	Coordonnées rectangulaires
Z	Module de section

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE IV

CONTRAINTES DANS LES POUTRES SYMÉTRIQUES CHARGÉES TRANSVERSALEMENT

CHAPITRE V

FLÈCHES DES POUTRES SYMÉTRIQUES CHARGÉES TRANSVERSALEMENT

CHAPITRE VI

PROBLÈMES DE FLEXION STATIQUEMENT INDÉTERMINÉS

CHAPITRE VII

POUTRES SYMÉTRIQUES DE SECTION VARIABLE POUTRES CONSTITUÉES PAR DEUX MATÉRIAUX

CHAPITRE VIII

FLEXION DES POUTRES DANS UN PLAN QUI N'EST PAS DE SYMÉTRIE

CHAPITRE IX

FLEXION ET CHARGE AXIALE COMBINÉES THÉORIE DES POTEAUX

CHAPITRE X

TORSION FLEXION ET TORSION COMBINÉES

CHAPITRE XI

ÉNERGIE DE DÉFORMATION ET CHOC

CHAPITRE XII

BARRES COURBES

APPENDICE A

MOMENT D'INERTIE DES AIRES PLANES

APPENDICE B

TABLEAUX DES PROFILÉS

1

TRACTION ET COMPRESSION DANS LES LIMITES ÉLASTIQUES

1. Elasticité

Un corps matériel se compose de petites particules ou molécules entre lesquelles agissent des forces. Ces forces moléculaires s'opposent au changement de forme du corps que tentent de créer les efforts externes. Sous l'action des efforts externes les particules du corps se déplacent jusqu'à ce qu'un équilibre s'établisse entre les efforts externes et internes. Le corps est alors en *état de déformation.* Pendant la déformation les efforts externes agissant sur le corps créent un travail, et ce travail se transforme, complètement ou partiellement, en *énergie potentielle de déformation.* Le ressort d'une montre offre un exemple d'accumulation d'énergie potentielle dans un corps déformé. Si les forces qui créent la déformation du corps diminuent graduellement d'intensité, le corps retrouve, totalement ou partiellement, sa forme originale, et pendant cette déformation inverse l'énergie potentielle de déformation, accumulée dans le corps, est restituée sous forme de travail externe.

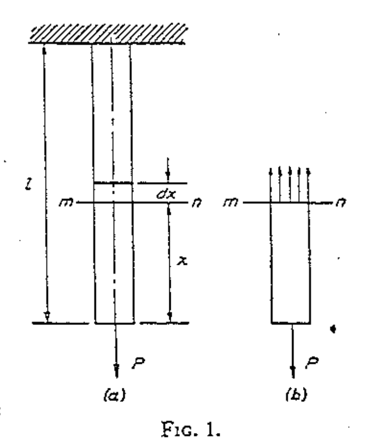


FIG. 1.

Considérons, par exemple, une barre prismatique sollicitée à une extrémité, comme l'indique la figure 1 ([1]). Sous l'action de cette charge la barre s'allongera d'une certaine longueur. Le point d'application de la charge se déplace vers le bas et celle-ci crée un travail positif durant sa translation. Lorsque la charge est réduite, l'allongement de la barre

([1]) On suppose que la charge agît le long de l'axe de la barre, c'est-à-dire le long de la ligne passant par les centres de figure des sections transversales.

diminue aussi, l'extrémité sollicitée de celle-ci remonte et l'énergie potentielle de déformation se transforme en travail qui déplace la charge vers le haut.

L'élasticité est la propriété physique d'un corps de reprendre sa forme initiale après suppression de la sollicitation. Le corps est *parfaitement élastique* s'il recouvre complètement sa forme originale après suppression de la charge ; il est *partiellement élastique* si la déformation produite par les forces externes ne disparaît pas complètement après qu'on a retiré la charge. Dans le cas d'un corps parfaitement élastique le travail dû aux forces externes, pendant la déformation, est entièrement transformé en énergie potentielle de déformation ([2]). Dans le cas d'un corps partiellement élastique, une partie du travail, créé par les forces externes pendant la déformation, se dissipe sous forme de chaleur dans le corps pendant la déformation non élastique. Les expériences montrent que les matériaux de construction tels que acier, pierre et bois peuvent être considérés comme parfaitement élastiques dans certaines limites, dépendant uniquement des propriétés du matériau. Supposons connus les efforts externes agissant sur la construction, le problème fondamental se posant à l'ingénieur consiste alors à déterminer les proportions des membrures de l'ouvrage de manière à ce qu'il approche des caractéristiques d'un corps parfaitement élastique soumis à toutes les conditions de service. C'est seulement ainsi que l'on peut être certain d'une utilisation continue et sûre de l'ouvrage, et éviter tout *gauchissement permanent* de ses membrures.

2. Loi de Hooke

A l'aide de l'expérience sur l'allongement des barres prismatiques (fig. 1), on a établi que l'allongement d'une barre est proportionnel à l'effort de traction, ceci pour plusieurs matériaux de construction et à l'intérieur de certaines limites. Cette simple relation linéaire entre effort et allongement fut formulée en 1678 par le savant anglais ROBERT HOOKE ([3]) et porte son nom à juste titre. Utilisons les notations :

([2]) On néglige ici la faible variation de température qui accompagne généralement une déformation élastique et l'échange de chaleur correspondant avec le milieu ambiant (voir 2e partie).

([3]) ROBERT HOOKE, *De Potentia restitutiva*, Londres, 1678.

P effort produisant l'allongement de la barre,
l longueur de la barre,
A aire de la section transversale de la barre,
δ allongement total de la barre,
E constante élastique du matériau, appelée *module d'élasticité*,

la loi expérimentale de Hooke s'écrit alors :

$$\delta = \frac{Pl}{AE}. \tag{1}$$

L'allongement de la barre est proportionnel à l'effort de traction, à la longueur de la barre et inversement proportionnel à l'aire de la section droite et au module d'élasticité. En réalisant les essais de traction, on prend habituellement la précaution de réaliser un centrage parfait de l'effort de traction. La figure 2 indique une méthode de fixation des extrémités d'un prototype d'essai de traction circulaire dans une machine d'essai de traction. De cette manière on prévient toute flexion de la barre. Négligeant les portions de la barre au voisinage des points d'application des forces ([4]), on suppose que pendant la traction toutes les fibres longitudinales de la barre prismatique subissent le même allongement et que les sections droites de la barre, initialement planes et perpendiculaires à l'axe de celle-ci, restent inchangées après allongement.

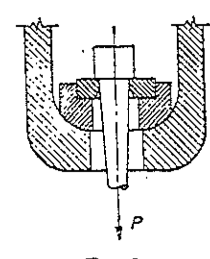


FIG. 2.

Pour étudier la valeur des efforts internes coupons la barre en deux par une section droite *mn* et considérons la partie inférieure de la barre en équilibre (fig. 1*b*). A l'extrémité inférieure de cette partie on applique un effort de traction P.

Sur l'extrémité supérieure les forces représentent l'action des particules de la partie supérieure de la barre déformée sur les particules de la partie inférieure. Des exemples familiers d'une telle répartition continue des forces sur une surface sont la pression hydrostatique et la pression de la vapeur. *L'intensité de la force*, c'est-à-dire, la force par unité d'aire, est d'une grande importance lorsqu'on utilise les forces réparties uniformément. Dans le cas d'une traction axiale, où toutes les fibres subissent un

([4]) On étudie dans la 2e partie, une répartition de contrainte plus compliquée au voisinage des points d'application des forces.

allongement égal, la distribution des forces sur la section *mn* sera *uniforme*. La résultante de ces forces passera par le centre de gravité de la section transversale et agira le long de l'axe de la barre. Tenant compte du fait que la somme de ces forces, à partir de la condition d'équilibre (fig. 1*b*), doit être égale à P, et soit σ la force par unité d'aire de section transversale, on obtient

$$\sigma = \frac{P}{A}. \tag{2}$$

Cette force par unité d'aire s'appelle *contrainte de traction unitaire* ou simplement *contrainte*. Dans cet ouvrage, les efforts sont mesurés en newtons et les aires en centimètres carrés, si bien que la contrainte s'exprime en bars (kgf/cm²). On détermine l'allongement de la barre par unité de longueur à l'aide de l'équation :

$$\varepsilon = \frac{\delta}{l}, \tag{3}$$

c'est l'*allongement unitaire* ou *déformation de traction*. Utilisant les équations (1), (2) et (3), la loi de Hooke s'écrit aussi sous la forme suivante :

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \tag{4}$$

et l'on voit que le *module d'élasticité est égal à la contrainte unitaire sur la déformation unitaire* ; il se calcule facilement à condition que la contrainte et l'allongement unitaire correspondant soient déterminés par un essai de traction. L'allongement unitaire ε est un nombre pur représentant le rapport de deux longueurs (voir éq. 3) ; donc, d'après (4), on conclut que le module d'élasticité a la même équation aux dimensions que la contrainte σ (bars). La première colonne du tableau 1 donne les valeurs moyennes du module E de quelques matériaux [5].

Les équations (1) à (4) peuvent être aussi utilisées dans le cas de compression des barres prismatiques. Dans ce cas, δ représente la contraction longitudinale totale, ε la *déformation compressive* et σ la *contrainte compressive*.

Pour la plupart des matériaux de construction le module d'élasticité

---

(5) La 2e partie donne plus de détails sur les propriétés mécaniques des matériaux.

de compression est le même qu'en cas de traction. Dans les calculs, la contrainte de traction et la déformation de traction sont positives, la contrainte et la déformation de compression sont négatives.

TABLEAU 1. — PROPRIÉTÉS MÉCANIQUES DES MATÉRIAUX

Matériau	E bar	Limite d'allongement bar	Résistance à la rupture bar
Acier au carbone (0,15 à 0,25 % de carbone) . .	21×10^5	21×10^2 à 28×10^2	38×10^2 à 46×10^2
Acier au nickel (3 à 3,5 % de nickel)	20×10^5	28×10^2 à 35×10^2	55×10^2 à 70×10^2
Duralumin	7×10^5	24×10^2 à 32×10^2	38×10^2 à 46×10^2
Cuivre laminé à froid . .	11×10^5		20×10^2 à 28×10^2
Verre	7×10^5		250
Pin, dans le sens des fibres .	1×10^5		6×10^2 à 14×10^2
Béton, en compression . .	$2,8 \times 10^5$		2×10^2

Problèmes

1. Déterminer l'allongement total d'une barre d'acier de 21 cm de long, si la contrainte de traction est égale à 15×10^3 bars.

Réponse. $\delta = \frac{15}{100}$ cm.

2. Déterminer l'effort de traction d'une barre d'acier cylindrique de 1 cm de diamètre, si l'allongement unitaire est égal à $0,7 \times 10^{-3}$.

Solution. La contrainte de traction dans la barre, d'après (4), est

$$\sigma = \varepsilon \cdot E = 14,7 \times 10^2 \text{ bars}.$$

L'effort de traction, d'après (2), est

$$P = \sigma \cdot A = 14,7 \times 10^2 \times \tfrac{1}{4}\pi = 1\,154,538 \text{ daN}.$$

3. Quel est le rapport des modules d'élasticité ce deux matériaux composant deux barres de mêmes dimensions lorsque, soumises à des efforts de traction égaux, leurs allongement unitaires sont dans le rapport 1 : $\frac{15}{8}$? Déterminer ces allongements si l'une des barres est en acier, l'autre en cuivre et la contrainte de traction égale à 7 000 bars.

Solution. Les modules sont inversement proportionnels aux allongements unitaires. Pour l'acier

$$\varepsilon = \frac{7\,000}{21 \times 10^5} = \frac{1}{3\,000},$$

pour le cuivre

$$\varepsilon = \frac{7\,000}{11 \times 10^5} = \frac{1}{1600}.$$

4. Une barre d'acier prismatique de 25 cm s'allonge de $\frac{1}{40}$ de cm sous l'action d'un effort de traction P. Déterminer cet effort sachant que le volume de la barre est 25 cm³.

Réponse. $P = 2\,100$ daN.

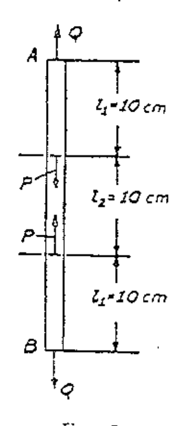


Fig. 3.

5. Un fil métallique de 21 cm de long soumis à une traction $P = 1\,000$ daN s'allonge de 1 mm. Calculer le module d'élasticité du fil métallique sachant que l'aire de sa section droite est 0,1 cm².

Réponse. $E = 21 \times 10^5$ bars.

6. Déterminer l'allongement total d'une barre d'acier AB, ayant une aire de section droite $A = 1$ cm² et soumise à l'action des efforts $Q = 5\,000$ daN (fig. 3).

Solution. L'effort de traction, dans les portions inférieure et supérieure de la barre, est égal à Q et l'effort dans la portion médiane est $Q-P$. L'allongement total est donc :

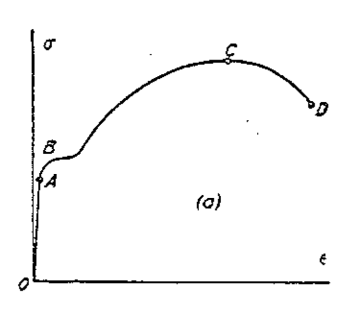
$$\delta = 2\frac{Ql_1}{AE} + \frac{(Q-P)l_2}{AE} = 2\frac{5\,000 \times 10}{1 \times 21 \times 10^5} + \frac{2\,500 \times 10}{1 \times 21 \times 10^5}$$
$$= \frac{1}{21} + \frac{1}{84} = \frac{5}{84} = 0{,}059\,5 \text{ cm}.$$

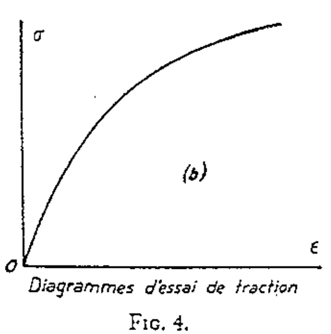
7. Résoudre le problème 6 en supposant que la barre est en duralumin et que $P = Q = 5\,000$ daN.

3. Diagramme d'essai de traction

La proportionnalité entre l'effort de traction et l'allongement correspondant n'est vraie que jusqu'à une certaine valeur limite de la contrainte de traction, appelée *limite de proportionnalité*, laquelle dépend des propriétés du matériau. Au-delà de cette limite, la relation entre allongement et contrainte de traction devient plus compliquée. Pour un matériau tel que l'acier de construction la proportionnalité entre charge et allongement reste valable dans un grand intervalle et la limite de proportionnalité est

de l'ordre de $17{,}5 \times 10^2$ à 21×10^2 bars. Pour des matériaux tels que la fonte ou le cuivre recuit la limite de proportionnalité est très basse, c'est-à-dire que des écarts avec la loi de Hooke apparaissent pour de faibles contraintes de traction.





Diagrammes d'essai de traction

Fig. 4.

En étudiant les propriétés mécaniques des matériaux au-delà de la limite de proportionnalité, on représente généralement la relation entre la déformation et la contrainte correspondante par un graphique appelé *diagramme d'essai de traction*. La figure 4*a* représente un diagramme classique de l'acier de construction. Ici, les allongements sont portés en abscisses et les contraintes correspondantes sont données par les ordonnées de la courbe $OABCD$. Du point O au point A la contrainte est proportionnelle à la déformation ; au-delà de A l'écart avec la loi de Hooke devient très sensible ; par suite la contrainte en A est la *limite de proportionnalité*. Pour une sollicitation au-delà de cette limite l'allongement augmente plus rapidement et la courbe représentative s'incurve. En B la barre s'allonge soudainement sans qu'il y ait eu d'augmentation appréciable de l'effort de traction. Ce phénomène, appelé *allongement* du métal, est toujours représenté graphiquement par un trait horizontal. La contrainte correspondant au point B est appelée *limite d'allongement*. Au cours d'un étirement ultérieur de la barre, le matériau recouvre sa résistance et, comme le montre le diagramme, la traction croît avec l'allongement jusqu'en C, où l'effort atteint sa valeur maximum. La contrainte correspondante est la *résistance limite* du matériau. Après le point C, l'allongement de la barre s'opère avec une diminution de la charge et finalement le métal se rompt pour une sollicitation correspondant au point D du diagramme.

On notera que l'étirement de la barre s'accompagne d'une contraction latérale mais il semble plus pratique, lors du calcul de la limite d'allongement et de la résistance limite, de conserver l'aire de section droite initiale A. Cette question sera étudiée en détail plus loin (voir 2ᵉ partie).

La figure 4*b* représente un diagramme d'essai de traction de la fonte.

Ce matériau a une limite de proportionnalité (*) très basse et ne possède pas de limite d'allongement définie.

On obtient des diagrammes analogues pour différents métaux dans le cas de la compression et l'on établit, pour l'acier, des points aussi caractéristiques que la limite de proportionnalité et la limite d'allongement. On étudie dans la seconde partie les propriétés mécaniques des matériaux en tension ou en compression.

4. Contrainte d'utilisation

Un diagramme d'essai de traction donne d'intéressantes informations concernant les propriétés mécaniques du matériau. Connaissant la limite proportionnelle, la limite d'allongement et la résistance limite d'un corps, on peut établir, pour chaque problème particulier de mécanique, la valeur de la contrainte prise comme *contrainte de sécurité*. Cette contrainte est généralement appelée *contrainte d'utilisation*.

En établissant la valeur de la contrainte d'utilisation de l'acier, on remarquera que pour des contraintes inférieures à la limite proportionnelle le métal est considéré comme parfaitement élastique, tandis qu'au-delà de cette limite une partie de la déformation subsiste après suppression de la charge, il se produit un *gauchissement permanent*. Afin de maintenir la structure dans des conditions élastiques et d'éliminer toute possibilité de gauchissement permanent, on fixe généralement la contrainte d'utilisation bien au-dessous de la limite de proportionnalité. On utilise, pour la détermination expérimentale de cette limite, des instruments de mesure extrêmement sensibles (extensomètres), et la localisation de la limite dépend, jusqu'à un certain point, de l'exactitude avec laquelle s'effectuent les mesures. Afin d'éliminer cette difficulté, on prend habituellement la *limite d'allongement* ou la *résistance limite*, comme base de détermination de la contrainte d'utilisation. Soit respectivement σ_W, $\sigma_{Y.P.}$ et σ_U, la contrainte d'utilisation, la limite d'allongement et la résistance limite du matériau, on détermine la valeur de la contrainte d'utilisation par les équations suivantes :

$$\sigma_W = \frac{\sigma_{Y.P.}}{n} \quad \text{ou} \quad \sigma_W = \frac{\sigma_U}{n_1}. \qquad (5)$$

(*) Pour la mesure des allongements, cette limite ne s'établit qu'à l'aide d'extensomètres très sensibles. Voir GRÜNEISEN, *Ber. deut. physik. Ges.*, 1906.

Ici n et n_1 sont des constantes appelées *coefficients de sécurité*, qui déterminent la valeur de la contrainte d'utilisation. Dans le cas d'acier de construction, il est logique de prendre la limite d'allongement comme base de calcul de la contrainte d'utilisation car, en effet, l'acier subit une déformation permanente appréciable pour cette limite, et cette déformation est inadmissible en génie civil. Un facteur de sécurité $n = 2$ donne alors une valeur raisonnable de la contrainte d'utilisation, à condition que les charges sollicitant l'ouvrage soient constantes ou statiques. On prendra nécessairement un plus grand facteur de sécurité dans les cas de charges appliquées soudainement ou variables, comme cela se produit fréquemment dans les organes de machines. Pour des matériaux cassants tels que la fonte, le béton ou différentes variétés de pierre, et pour un matériau comme le bois, on prend généralement la résistance limite comme base de détermination de la contrainte d'utilisation.

La valeur du facteur de sécurité dépend de l'exactitude avec laquelle sont connus les efforts externes agissant sur l'ouvrage, de l'exactitude avec laquelle sont calculées les contraintes dans les membrures de l'ouvrage, et aussi de l'homogénéité des matériaux utilisés. On étudiera, avec plus de détails, cette question importante que sont les contraintes d'utilisation (voir 2e partie). Ici nous ne donnons que des exemples simples de détermination des dimensions de sécurité de la section transversale des barres, en supposant connue la contrainte d'utilisation.

Problèmes

1. Déterminer le diamètre d des boulons d'acier N d'une presse, pour une compression maximum $P = 50\,000$ daN (fig. 5), lorsque la contrainte d'utilisation de l'acier est, dans ce cas, $\sigma_W = 700$ bars. Déterminer l'allongement total des boulons pour la charge maximum, sachant que la longueur entre têtes est $l = 1$ m.

Solution. D'après l'équation (2), l'aire de section transversale nécessaire est :

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{P}{2\,\sigma_W} = \frac{50\,000}{1\,400} = 35{,}71 \text{ cm}^2 .$$

D'où $$d = \sqrt{\frac{142{,}84}{\pi}}$$

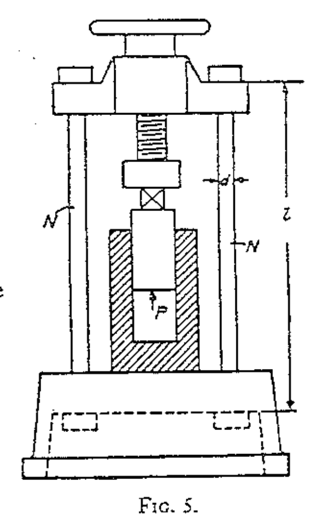


Fig. 5.

D'après (3) et (4), l'allongement total est

$$\delta = \varepsilon l = \frac{\sigma l}{E} = \frac{7 \times 10^2 \times 10^2}{21 \times 10^5} = \frac{1}{30}\,\text{cm}.$$

2. Un système ABC composé de deux barres d'acier égales (fig. 6) de 4,5 m de long, articulé aux deux extrémités, est soumis à une charge verticale P. Déterminer les aires des sections droites nécessaires des barres et la flèche du point B lorsque $P = 2\,100$ daN, $\sigma = 700$ bars et l'angle d'inclinaison initial des barres, $\theta = 30°$. On néglige le poids des barres comme infiniment petit devant P.

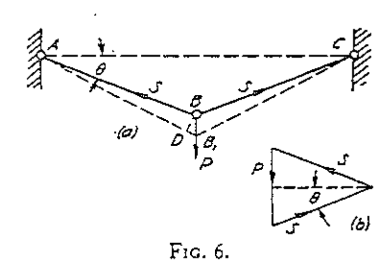


FIG. 6.

Solution. A l'aide de la figure 6*b*, représentant la condition d'équilibre de l'articulation B, on tire la traction dans les barres :

$$S = \frac{P}{2 \sin \theta}, \quad \text{pour } \theta = 30°, \quad S = P = 2\,100\ \text{daN}.$$

L'aire de section droite nécessaire est

$$A = \frac{S}{\sigma_W} = \frac{2\,100}{700} = 3\ \text{cm}^2.$$

La flèche BB_1 s'obtient à partir du petit triangle rectangle DBB_1 dans lequel l'arc BD, de rayon égal à la longueur initiale des barres, est assimilé à une perpendiculaire abaissée sur AB_1, qui est la position de la barre AB après déformation. L'allongement de la barre AB est

$$B_1D = \varepsilon \cdot l = \frac{\sigma_W l}{E} = \frac{700 \times 450}{21 \times 10^5} = \frac{15}{100} = 0{,}15\ \text{cm}$$

et la flèche

$$BB_1 = \frac{B_1 D}{\sin \theta} = 3\ \text{mm}.$$

On constate que la variation d'angle, due à la flèche BB_1, est très petite et le calcul précédent de S, fondé sur l'hypothèse $\theta = 30°$, reste suffisamment exact.

3. Déterminer les dimensions de la section droite d'une poutre en bois BC et d'une barre d'acier AB du système ABC sollicité en B. La contrainte d'utilisation du bois de pin est $\sigma_w = 12$ bars et celle de l'acier 700 bars. La charge P est égale à 2 700 daN. Les dimensions du système sont indiquées sur la figure 7. Déterminer les composantes verticale et horizontale du déplacement du point B résultant de la déformation du système. On néglige le poids de ce dernier.

Solution. D'après le triangle de la figure 7*b*, traduisant la condition d'équilibre de l'articulation B et semblable au triangle ABC (fig. 7*a*), nous avons :

$$S = \frac{P \cdot 4{,}5}{2{,}7} = 4\,500\ \text{daN},$$

$$S_1 = \frac{P \cdot 3{,}6}{2{,}7} = 3\,600\ \text{daN}.$$

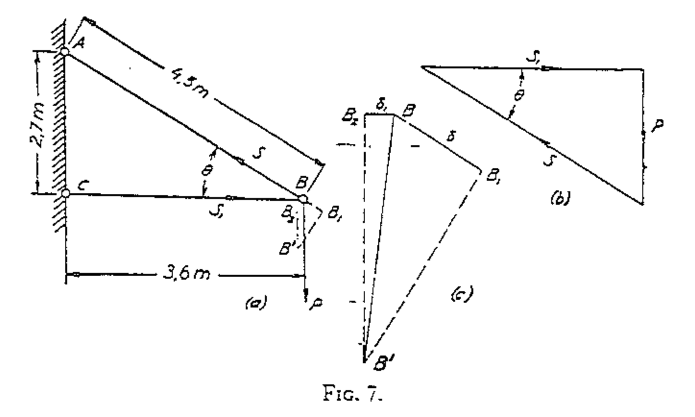


FIG. 7.

Les aires des sections droites de la barre d'acier et de la poutre en bois sont :

$$A = \frac{S}{\sigma_W} = \frac{4\,500}{700} = 6{,}429\ \text{cm}^2, \qquad A_1 = \frac{S_1}{\sigma_W} = \frac{3\,600}{12} = 300\ \text{cm}^2.$$

L'allongement total de la barre d'acier et la compression totale de la poutre en bois sont respectivement :

$$\delta = \frac{Sl}{E_s A} = \frac{4\,500 \times 450}{21 \times 10^5 \times 6{,}429} = 0{,}15\ \text{cm},$$

$$\delta_1 = \frac{S_1 l_1}{E_w A_1} = \frac{3\,600 \times 360}{1 \times 10^5 \times 300} = 0{,}04\ \text{cm}.$$

Pour déterminer le déplacement de l'articulation B, dû à la déformation, on trace les arcs de centres A et C (fig. 7*a*) et de rayons respectivement égaux aux longueurs de la barre tendue et de la poutre comprimée. Ces deux arcs se coupent en B', nouvelle position de B. Le tracé est reproduit à plus grande échelle sur la figure 7*c*, où BB_1 est l'allongement de la barre d'acier et BB_2 la compression de la poutre en bois. Les arcs sont remplacés, sur la figure, par les perpendiculaires en pointillé. Le déplacement du nœud B est alors représenté par BB'. On détermine aisément, d'après la figure, les composantes de ce déplacement.

4. Déterminer, dans le problème précédent, l'angle d'inclinaison θ de la barre AB de manière que son poids soit minimum.

Solution. Soit θ l'angle que fait la barre avec la poutre horizontale et l_1 la longueur de la poutre ; la longueur de la barre est donc $l = l_1/\cos\theta$, l'effort de traction dans la barre est $S = P/\sin\theta$ et l'aire de section droite nécessaire est $A = P/\sigma_W \sin\theta$. Le volume de la barre est

$$l \cdot A = \frac{l_1 P}{\sigma_W \sin\theta\cos\theta} = \frac{2\, l_1 P}{\sigma_W \sin 2\theta}.$$

On constate que le volume et le poids de la barre sont minimums lorsque $\sin 2\theta = 1$, c'est-à-dire, $\theta = 45°$.

5. Le cadre carré $ABCD$ (fig. 8*a*), constitué par cinq barres d'acier de 6,45 cm² de section, est soumis à l'action de deux forces $P = 4\,515$ daN suivant la diagonale DB. Déterminer les variations des angles A et C dues à la déformation du cadre. Calculer les variations de ces mêmes angles, lorsque les forces sont appliquées comme l'indique la figure 8*b*.

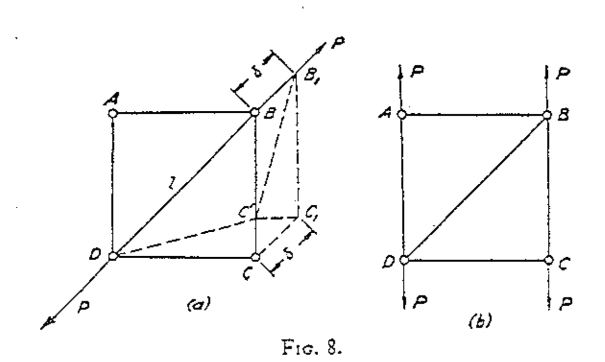


Fig. 8.

Solution. Dans le cas de la figure 8*a* la diagonale supporte totalement la charge P. En supposant le nœud D fixe et la direction de la diagonale constante, le déplacement du nœud B, suivant la diagonale, est égal à l'allongement de celle-ci. $= Pl/AE$. La détermination de la nouvelle position C' du nœud C est indiquée par la ligne pointillée sur la figure. D'après le petit triangle CC_1C', $CC' = \delta/\sqrt{2}$. L'angle de rotation de la barre BC, due à la déformation du cadre, est alors égal à

$$\frac{CC'}{DC} = \frac{\delta\sqrt{2}}{\sqrt{2}\, l} = \frac{\delta}{l} = \frac{P}{1 \cdot E} = \frac{1}{3\,000} \text{ radian}.$$

Par conséquent, l'accroissement de l'angle en C est

$$2 \times \frac{1}{3\,000} = \frac{1}{1\,500} \text{ radian}.$$

On laisse au lecteur le soin de résoudre le problème de la figure 8*b*.

6. Déterminer la position de la charge P sur la poutre ABD de manière que l'effort dans la barre BC soit maximum. Calculer l'angle θ pour lequel le volume de la barre BC est minimum (fig. 9).

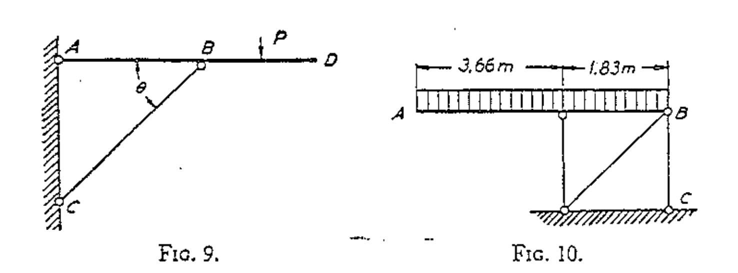


Fig. 9. Fig. 10.

Réponse. L'effort dans la barre BC est maximum lorsque la charge P se trouve au point D. Le volume de la barre est minimum pour $\theta = 45°$.

7. Déterminer l'aire de section droite nécessaire de la barre d'acier BC (fig. 10) pour une contrainte d'utilisation $\sigma_w = 1\,055$ bars et pour une charge $q = 1\,488$ daN/m uniformément répartie sur la poutre AB.

Réponse. $A = 3{,}87$ cm².

8. Déterminer les aires des sections droites nécessaires A et A_1 des barres AB et BC du système de la figure 11, lorsque $\sigma_w = 1\,125$ bars.

Réponse. $A = 16{,}13$ cm² ; $A_1 = 12{,}90$ cm².

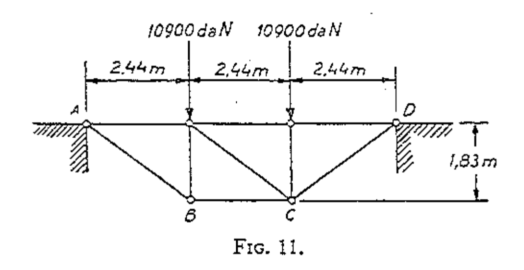


Fig. 11.

9. Déterminer les aires des sections droites nécessaires A et A_1 des barres AB et BC du système de la figure 12*a*, pour $\sigma_w = 1\,125$ bars.

Solution. Soit Δmpo (fig. 12*b*) le triangle des forces agissant sur le nœud B. Traçons alors on, on conclut que les triangles mno et npo sont semblables aux triangles BFA et FBC (fig. 12*a*). D'après cette similitude la

figure 12*b* nous donne les efforts dans les barres AB et BC et les valeurs de leurs projections horizontales et verticales. Les aires cherchées sont alors :

$$A = \frac{16\,328}{1\,125} = 14{,}514\,\text{cm}^2\,, \qquad A_1 = \frac{4\,082\sqrt{13}}{1\,125} = 13{,}084\,\text{cm}^2\,.$$

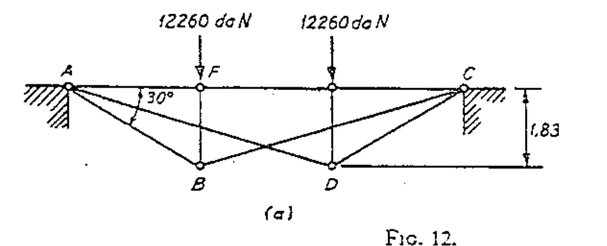


Fig. 12.

10. Calculer l'aire de section droite de la barre CD (fig. 11) et l'allongement total de la barre si le matériau est en acier et si $\sigma_W = 1\,125$ bars.

Réponse. $A = 16{,}13$ cm², $\delta = 1{,}62$ mm.

11. Résoudre le problème 8, en supposant la charge uniquement appliquée à un nœud de la corde supérieure, à 2,44 m de l'appui A.

Réponse. $A = 10{,}78$ cm² ; $A_1 = 8{,}58$ cm².

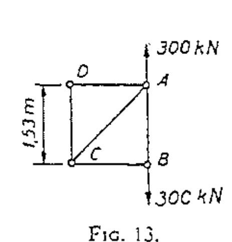


Fig. 13.

12. Un cadre carré en acier est sollicité comme l'indique la figure 13. Trouver l'allongement total de chaque barre lorsque l'aire de section droite de chacune d'elles est 6,452 cm².

Réponse. L'allongement de toutes les barres est nul sauf pour AB. Pour AB, $\delta = 3{,}05$ mm.

5. Contrainte et déformation d'une barre dues à son propre poids

En étudiant l'allongement d'une barre (fig. 1), seule la charge P appliquée à son extrémité fut prise en considération. Si la longueur de la barre est importante, son poids produit une contrainte additionnelle qu'on ne peut négliger. Dans ce cas la contrainte maximum se situe à la section droite supérieure d'encastrement. Soit γ le poids par unité de volume de la barre, le poids total devient $A\gamma l$ et la contrainte maximum est donnée par l'équation :

$$\sigma_{\max} = \frac{P + A\gamma l}{A} = \frac{P}{A} + \gamma l\,. \qquad (6)$$

Le second terme du second membre de (6) représente la contrainte due au poids de la barre.

Le poids de la portion de barre, située au-dessous de la section droite mn à une distance x de l'extrémité inférieure (fig. 1) est $A\gamma x$, et la contrainte sur cette section droite est

$$\sigma = \frac{P + A\gamma x}{A}\,. \qquad (7)$$

Remplaçons $\sigma_{\max}$ par σ_W dans (6), l'équation permettant le calcul de la section de sécurité devient :

$$A = \frac{P}{\sigma_W - \gamma l}\,. \qquad (8)$$

Il est intéressant de remarquer qu'avec l'augmentation de la longueur l, le poids de la barre devient de plus en plus important, le dénominateur du second membre de l'équation (8) décroît et la section nécessaire A augmente. Lorsque $\gamma l = \sigma_W$, c'est-à-dire que la contrainte due au poids de la barre est égale à la contrainte d'utilisation, le second membre de (8) tend vers l'infini. Dans ce cas il est impossible d'utiliser un profil prismatique, on utilisera alors une barre à section variable.

Pour déterminer l'allongement total d'une barre prismatique soumise à l'action de son propre poids et à un effort de traction P exercé en son extrémité, considérons en premier lieu l'allongement d'un élément de longueur dx découpé dans la barre par deux sections droites adjacentes (voir fig. 1). On suppose que la contrainte de traction est constante sur l'élément différentiel dx et que sa valeur s'obtient à l'aide de (7). L'allongement $d\delta$ de l'élément est alors.

$$d\delta = \frac{\sigma\,dx}{E} = \frac{P + A\gamma x}{AE}\,dx\,.$$

L'allongement total de la barre s'obtient par sommation des allongements de tous les éléments. D'où

$$\delta = \int_0^l \frac{P + A\gamma x}{AE}\,dx = \frac{l}{AE}\left(P + \tfrac{1}{2}A\gamma l\right). \qquad (9)$$

Comparons cette équation à (1), on constate que l'allongement total produit par le propre poids de la barre est identique à celui produit par une charge égale à la moitié de ce poids et appliquée à l'extrémité de la barre.

Problèmes

1. Déterminer l'aire de la section transversale d'une barre d'acier prismatique, verticale (fig. 1), supportant en son extrémité inférieure une charge $P = 300$ kN. La barre mesure 220 m, la contrainte d'utilisation $\sigma_{\overline{w}} = 700$ bars et la densité de l'acier est 7,8. Calculer l'allongement total de la barre.

Solution. L'aire de la section droite est, d'après (8),

$$A = \frac{30\,000}{700 - 78 \times 10^{-4} \times 220 \times 10^{2}} = 56{,}78 \text{ cm}^2 .$$

L'équation (9) nous donne l'allongement total :

$$\delta = \frac{220 \times 10^{2}}{56{,}78 \times 21 \times 10^{5}} (30\,000 + \tfrac{1}{2}\, 56{,}78 \times 78 \times 10^{-4} \times 220 \times 10^{2}) = 6{,}43 \text{ cm} .$$

2. Calculer l'allongement d'une barre conique soumise à l'action de son propre poids (fig. 14). La longueur de la barre est l, son diamètre de base est d et son poids spécifique, γ.

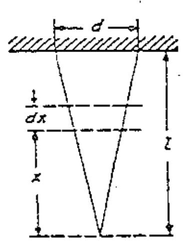


Fig. 14.

Solution. Le poids de la barre est

$$Q = \frac{\pi d^2}{4} \frac{l\gamma}{3} .$$

Pour toute section droite, à une distance x de l'extrémité inférieure de la barre, l'effort de traction, égal au poids de la partie inférieure de la barre, est

$$\frac{Qx^3}{l^3} = \frac{\pi d^2}{4} \frac{\gamma x^3}{3 l^2} .$$

Supposons que l'effort de traction est uniformément réparti sur la section transversale [1] et assimilons l'élément de longueur dx à une barre prismatique, l'allongement de cet élément est

$$\mathrm{d}\delta = \frac{\gamma x}{3E} \mathrm{d}x ,$$

et l'allongement total de la barre est

$$\delta = \frac{\gamma}{3E} \int_0^l x \mathrm{d}x = \frac{\gamma l^2}{6E} .$$

[1] Une telle hypothèse se justifie lorsque l'angle au sommet du cône est petit.

Cet allongement est le tiers de celui de la barre prismatique de même longueur (voir éq. 9).

3. La tige prismatique, verticale, d'une pompe de mine est actionnée par un vilebrequin (fig. 15). On suppose que la tige est en acier et la contrainte d'utilisation $\sigma_{\overline{w}} = 492$ bars ; déterminer l'aire de la section droite de la tige lorsque la résistance du piston pendant le mouvement descendant est 100 daN, et 1 000 daN durant le mouvement ascendant. La longueur de la tige est 100 m. Calculer la longueur nécessaire du rayon r du maneton, la course de la pompe étant 20 cm.

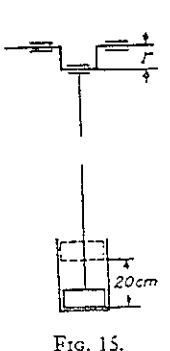


Fig. 15.

Solution. L'aire de section droite nécessaire de la tige s'obtient à l'aide de l'équation (8) en y substituant $P = 1\,000$ daN. D'où

$$A = \frac{1\,000}{492 - 78 \times 10^{-4} \times 10^{4}} = 2{,}42 \text{ cm}^2 .$$

La différence dans l'allongement total de la tige lors de la montée et de la descente est due à la résistance du piston ; elle est égale à

$$\Delta\delta = \frac{(1\,000 + 100)\, 10^4}{21 \times 10^5 \times 2{,}42} = 2{,}16 \text{ cm} .$$

Le rayon du maneton sera donc

$$r = \frac{20 + 2{,}16}{2} = 11{,}08 \text{ cm} .$$

4. Un fil d'acier et un fil d'aluminium sont suspendus verticalement. Déterminer la longueur de chaque fil pour laquelle la contrainte, due au poids de celui-ci, atteint la résistance à la rupture. Pour l'acier $\sigma_U = 21\,092$ bars et $\gamma = 78 \times 10^{-4}$daN/cm^3, et pour le fil d'aluminium $\sigma_U = 3\,515$ bars et $\gamma = 27 \times 10^{-4}$ daN/cm^3.

Réponse. Pour l'acier $l = 27041$ m, pour l'aluminium $l = 13018$ m.

5. Dans quel rapport croît la contrainte maximum produite dans une barre prismatique sous l'effet de son propre poids, lorsque toutes ses dimensions croissent dans le rapport n : 1 (fig. 1) ?

Réponse. La contrainte augmente dans le rapport n : 1.

6. Une pile se composant de deux éléments prismatiques d'égale longueur (fig. 16) est soumise en son sommet à une compression $P = 3\,000$ kN. Calculer le volume de la maçonnerie sachant que la pile mesure 36 m de hauteur, que son poids spécifique est 16×10^{-4} daN/cm^3 et la contrainte de

compression maximum dans chaque tronçon est 10 bars. Comparer ce volume à celui d'une pile prismatique simple calculée dans les mêmes conditions.

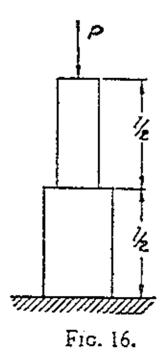


FIG. 16.

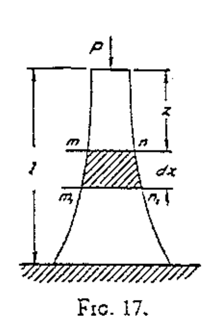


FIG. 17.

Solution. L'aire de section droite du tronçon supérieur de la pile s'obtient à l'aide de (8) :

$$A = \frac{3 \times 10^5}{10 - 16 \times 10^{-4} \times 18 \times 10^2} = 42\,134{,}83 \text{ cm}^2 = 4{,}21 \text{ m}^2 .$$

Pour le tronçon inférieur :

$$A_1 = \frac{10 \times 42\,134{,}83}{10 - 16 \times 10^{-4} \times 18 \times 10^2} = 59\,178{,}13 \text{ cm}^2 = 5{,}92 \text{ m}^2 .$$

Le volume total de maçonnerie V est égal à $(4{,}21 + 5{,}92)18 = 182{,}34 \text{ m}^3$. Pour une pile prismatique :

$$A = \frac{3 \times 10^5}{10 - 16 \times 10^{-4} \times 36 \times 10^2} = 70\,754{,}72 \text{ cm}^2 = 7{,}08 \text{ m}^2 ,$$

$$V = 7{,}08 \times 36 = 254{,}88 \text{ m}^3 .$$

7. Résoudre le problème précédent en supposant que la pile est composée de trois éléments prismatiques d'égale longueur.

Réponse. $A = 3{,}71 \text{ m}^2$, $A_1 = 4{,}60 \text{ m}^2$, $A_2 = 5{,}69 \text{ m}^2$, $V = 168 \text{ m}^3$.

8. Déterminer la forme de la pile de la figure 17 de manière que la contrainte soit toujours égale à σ_W dans chaque section droite. La forme satisfaisant à cette condition est la *forme d'égale résistance.*

Solution. Considérons l'élément différentiel hachuré sur la figure, il est évident que la compression sur la section m_1n_1 est supérieure à celle agissant sur mn d'une quantité égale au poids de l'élément. Donc, puisque la contrainte doit être la même et égale à σ_W dans les deux sections, la différence $\mathrm{d}A$

entre les aires des sections doit être telle qu'elle compense la différence entre les compressions correspondantes. Par suite,

$$\mathrm{d}A\sigma_W = \gamma A \mathrm{d}x, \qquad (a)$$

le second membre de l'équation représente le poids de l'élément. Divisons les deux membres par $A\sigma_W$ et intégrons, on trouve

$$\int \frac{\mathrm{d}A}{A} = \int \frac{\gamma \,\mathrm{d}x}{\sigma_W},$$

d'où,

$$\ln A = \frac{\gamma x}{\sigma_W} + C_1$$

et

$$A = C\mathrm{e}^{\gamma x/\sigma_W}, \qquad (b)$$

où e est la base des logarithmes népériens et $C = \mathrm{e}^{C_1}$.

En $x = 0$ l'équation de la section, au sommet de la pile, donne

$$(A)_{x=0} = C.$$

Mais l'aire de la section au sommet est égale à P/σ_W ; par suite $C = P/\sigma_W$ et l'équation (b) devient :

$$A = \frac{P}{\sigma_W}\mathrm{e}^{\gamma x/\sigma_W}. \qquad (c)$$

L'aire de base de la pile s'obtient en substituant l à x dans (c), d'où

$$A_{\max} = \frac{P}{\sigma_W}\mathrm{e}^{\gamma l/\sigma_W}. \qquad (d)$$

9. Rechercher le volume de la maçonnerie d'égale résistance en utilisant les données du problème 6.

Solution. A l'aide de (d) on obtient la différence des aires des sections droites à la base et au sommet de la pile :

$$\frac{P}{\sigma_W}\mathrm{e}^{\gamma l/\sigma_W} - \frac{P}{\sigma_W} = \frac{P}{\sigma_W}(\mathrm{e}^{\gamma l/\sigma_W} - 1).$$

Cette différence multipliée par la contrainte d'utilisation σ_W donne évidemment le poids de la pile ; son volume est donc

$$V = \frac{P}{\gamma}(\mathrm{e}^{\gamma l/\sigma_W} - 1).$$

6. Problèmes de traction et de compression statiquement indéterminés

Dans certains cas les efforts axiaux agissant sur les barres d'une structure ne peuvent être déterminés par les équations de la statique seule,

et la déformation de la structure doit alors être prise en considération. De telles structures sont des *systèmes statiquement indéterminés ou hyperstatiques*.

La figure 18 représente un exemple simple d'un tel système. La charge P entraîne l'allongement des barres OB, OC et OD, qui sont dans un même plan. Les conditions d'équilibre du nœud O conduisent à deux équations de la statique, insuffisantes à déterminer les tractions inconnues dans les barres ; il est alors nécessaire d'introduire une troisième équation tenant compte de la déformation. Supposons, pour simplifier, que le système est symétrique par rapport à l'axe vertical OC, que la barre verticale est en acier, A_s et E_s étant respectivement son aire de section droite et son module d'élasticité ; supposons encore que les barres obliques sont en cuivre avec A_c et E_c pour aire et module. La longueur de la barre verticale est l et celle des barres obliques $l/\cos\alpha$. Soit X l'effort de traction agissant sur la partie verticale et Y les efforts dans les barres obliques. Par raison de symétrie la seule équation d'équilibre de l'articulation O est

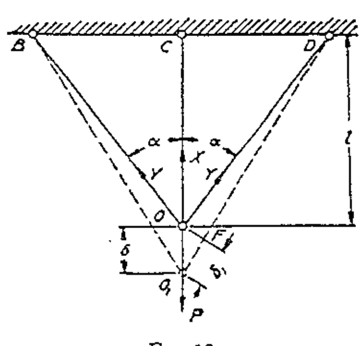


FIG. 18.

$$X + 2\,Y\cos\alpha = P\,. \qquad (a)$$

Considérons, afin de calculer la seconde équation nécessaire à la détermination des inconnues X et Y, le système déformé représenté en pointillé sur la figure. Soit δ l'allongement total de la barre verticale sous l'action de la charge P ; le triangle OFO_1 donne alors l'allongement δ_1 des barres obliques. Supposons que ces allongements sont très faibles, l'arc OF de centre D peut alors être assimilé à une droite perpendiculaire à O_1D et l'angle O_1 pris égal à l'angle initial α. D'où

$$\delta_1 = \delta\cos\alpha\,.$$

Les allongements unitaires et les contraintes des barres verticale et obliques sont respectivement :

$$\varepsilon_s = \frac{\delta}{l}\,, \qquad \sigma_s = \frac{E_s\delta}{l} \qquad \text{et} \qquad \varepsilon_c = \frac{\delta\cos^2\alpha}{l}\,, \qquad \sigma_c = \frac{E_c\delta\cos^2\alpha}{l}\,.$$

On obtient ensuite les efforts dans les barres en multipliant les contraintes par les aires des sections droites :

$$X = \sigma_s A_s = \frac{A_s E_s \delta}{l}\,, \qquad Y = \sigma_c A_c = \frac{A_c E_c \delta\cos^2\alpha}{l}\,, \qquad (b)$$

d'où l'on tire

$$Y = X\cos^2\alpha\,\frac{A_c E_c}{A_s E_s}\,.$$

Substituons dans l'équation (a), on obtient

$$X = \frac{P}{1 + 2\cos^3\alpha\,\dfrac{A_c E_c}{A_s E_s}}\,. \qquad (10)$$

On constate que l'effort X ne dépend pas que de l'angle d'inclinaison α mais aussi des aires des sections droites et des propriétés mécaniques des matériaux constituant les barres. Dans le cas particulier où toutes les barres ont même section droite et même module, l'équation (10) devient

$$X = \frac{P}{1 + 2\cos^3\alpha}\,.$$

Lorsque α tend vers zéro, $\cos\alpha$ tend vers l'unité et l'effort dans la barre verticale tend vers $\frac{1}{3}P$. Lorsque α tend vers 90°, les barres obliques s'allongent démesurément et la barre médiane supporte la totalité de la charge.

Considérons, comme autre exemple de système hyperstatique, une barre prismatique à extrémités encastrées, soumise à une sollicitation axiale appliquée à une section intermédiaire mn (fig. 19). La charge P est équilibrée par les réactions R et R_1 aux extrémités, nous avons

$$P = R + R_1\,. \qquad (c)$$

On considère la déformation de la barre pour calculer la seconde équation permettant de déterminer les efforts R et R_1. La charge P, associée à R, provoque un raccourcissement de la partie inférieure de la barre et avec la réaction R_1, elle entraîne l'allongement de la partie supérieure. Le

raccourcissement total d'une partie est égal à l'allongement total de l'autre. D'où, en utilisant (1), on obtient

$$\frac{R_1 a}{AE} = \frac{Rb}{AE}.$$

Par suite $$\frac{R}{R_1} = \frac{a}{b}. \qquad (d)$$

Fig. 19.

C'est-à-dire, les efforts R et R_1 sont inversement proportionnels aux distances de leurs points d'application à la section droite mn sollicitée. On calcule alors aisément ces efforts à l'aide des équations (c) et (d).

Problèmes

1. Un cylindre en acier de diamètre d et un tube de cuivre de diamètre extérieur D sont comprimés entre les plateaux d'une presse (fig. 20). Déterminer les contraintes dans l'acier et le cuivre ainsi que la compression unitaire, pour $P = 45\,359$ daN, $d = 10{,}16$ cm et $D = 20{,}32$ cm.

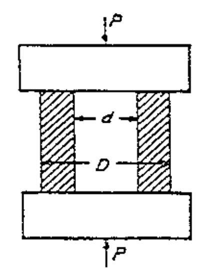


Fig. 20.

Solution. Ici encore les seules équations de la statique sont insuffisantes, et il faut tenir compte de la déformation du cylindre et du tube afin de connaître la répartition de la charge entre les deux matériaux. Le raccourcissement unitaire est identique pour l'acier et le cuivre ; donc les contraintes dans chaque matériau seront dans le même rapport que leurs modules (voir éq. 4), c'est-à-dire que la contrainte de compression dans l'acier est égale aux $\frac{15}{8}$ de celle du cuivre. Par suite, la valeur de la contrainte σ_c dans le cuivre s'obtient à l'aide de l'équation de la statique :

$$P = \frac{\pi d^2}{4}\frac{15}{8}\sigma_c + \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2)\,\sigma_c.$$

Substituant les valeurs numériques, on obtient :

$$\sigma_c = 114{,}6 \text{ bars}, \qquad \sigma_s = \tfrac{15}{8}\sigma_c = 214{,}9 \text{ bars}$$

unitaire

$$\varepsilon = \frac{\sigma_c}{E_c} = 102 \times 10^{-6}.$$

2. Un poteau carré en béton armé est comprimé par un effort axial $P = 27\,216$ daN. Déterminer les parts respectives de la charge, supportées par le béton et l'acier, sachant que l'aire de section droite de l'acier est 1/10 de celle du béton. On suppose que les barres d'acier sont placées symétriquement par rapport à l'axe du poteau.

Réponse. La charge supportée par l'acier est les $\frac{3}{4}$ de celle supportée par le béton.

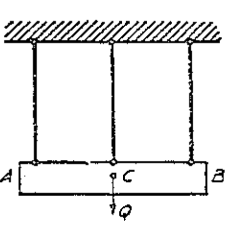


Fig. 21.

3. Un corps solide AB de poids Q est suspendu à trois fils verticaux disposés symétriquement par rapport au centre de gravité C du corps (fig. 21). Déterminer les tractions dans les fils lorsque le fil central est en acier, les deux autres en cuivre. Les aires des sections droites des trois fils sont semblables.

Suggestion. Utiliser la méthode du problème 1.

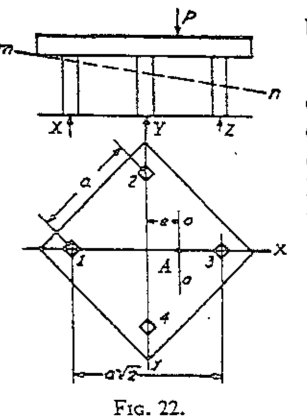


Fig. 22.

4. Déterminer les efforts produits, dans les quatre pieds d'une table carrée (fig. 22), par une charge P agissant en A. Le plateau et le plancher de la table sont supposés absolument rigides et les quatre pieds scellés au plancher de la table travaillent aussi bien en traction qu'en compression.

Solution. Supposons que la nouvelle position du plateau de la table est celle indiquée par le pointillé mn, la compression des pieds 2 et 4 est la moyenne de celle des pieds 1 et 3. Par suite

$$2Y = X + Z,$$

et puisque $2Y + X + Z = P$, on obtient

$$2Y = X + Z = \tfrac{1}{2}P. \qquad (e)$$

On obtient une équation supplémentaire permettant la détermination de X et Z en considérant le moment de tous les efforts par rapport à l'axe horizontal $O-O$ parallèle à y et passant par A. D'où

$$X(\tfrac{1}{2}a\sqrt{2} + e) + \tfrac{1}{2}P \cdot e = Z(\tfrac{1}{2}a\sqrt{2} - e). \qquad (f)$$

On obtient à l'aide de (e) et (f) :

$$X = P\left(\frac{1}{4} - \frac{e}{a\sqrt{2}}\right), \qquad Y = \frac{P}{4}, \qquad Z = P\left(\frac{1}{4} + \frac{e}{a\sqrt{2}}\right),$$

Lorsque $e > a\sqrt{2}/4$, X est négatif, le pied 1 travaille alors en traction.

5. Déterminer les efforts dans les pieds de la table précédente lorsque la charge est appliquée au point de coordonnées :

$$x = \frac{a}{4}, \quad y = \frac{a}{5}.$$

Remarque. En résolvant ce problème on remarquera que lorsque le point d'application de la charge P n'est point sur une diagonale de la table, cette charge peut être remplacée par deux autres statiquement équivalentes à P et appliquées en des points sur les deux diagonales. Les efforts créés dans les pieds par chacune de ces deux charges s'obtiennent comme précédemment. On détermine les efforts dans les pieds de la table, pour une position quelconque de P, en superposant les effets des deux charges.

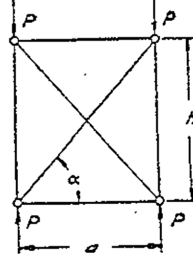


Fig. 23.

6. Un cadre rectangulaire, muni de membrures diagonales, est soumis à l'action d'efforts de compression P (fig. 23). Trouver les efforts dans les barres sachant qu'elles sont toutes constituées par le même matériau, que A est l'aire de section droite des montants et A_1 celle des autres barres.

Solution. Soit X l'effort de compression dans chaque montant, Y la compression dans chaque diagonale et Z l'effort de traction dans chaque barre horizontale. Par suite, la condition d'équilibre d'une des articulations donne :

$$Y = (P - X)/\sin\alpha, \qquad Z = Y\cos\alpha = (P - X)\operatorname{cotg}\alpha. \qquad (g)$$

La troisième équation résulte de la condition suivant laquelle le cadre reste rectangulaire après déformation, par raison de symétrie ; donc

$$(a^2 + h^2)\left(1 - \frac{Y}{A_1E}\right)^2 = h^2\left(1 - \frac{X}{AE}\right)^2 + a^2\left(1 + \frac{Z}{A_1E}\right)^2.$$

Il découle, en négligeant les infiniment petits du second ordre,

$$\frac{(a^2 + h^2)Y}{A_1E} = \frac{h^2X}{AE} - \frac{a^2Z}{A_1E}. \qquad (h)$$

Résolvons les équations (g) et (h) on obtient l'effort dans une diagonale :

$$Y = \frac{P}{\frac{a^2 + h^2}{h^2}\cdot\frac{A}{A_1} + \frac{a^2}{h^2}\cdot\frac{A}{A_1}\cos\alpha + \sin\alpha}.$$

Les équations (g) permettent de déterminer aisément les efforts dans les autres barres.

7. Résoudre le problème ci-dessus en supposant que $a = h$, $A = 5\,A_1$ et $P = 25\,000$ daN.

8. Trouver les contraintes produites dans un boulon d'acier et dans un tube de cuivre (fig. 24) par le serrage de $\frac{1}{4}$ de tour de l'écrou, sachant que la longueur du boulon est $l = 63$ cm, le pas de vis du boulon $h = 3$ mm, l'aire de section droite du boulon $A_s = 6$ cm, celle du tube $A_c = 12$ cm.

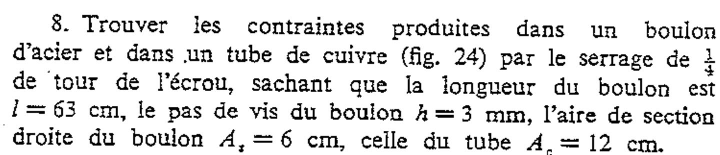


Fig. 24.

Solution. Soit X l'effort de traction dans le boulon et la compression dans le tube. On obtient X d'après la condition que l'allongement du boulon, additionné au raccourcissement du tube, est égal au déplacement de l'écrou le long du boulon. Dans notre cas, en supposant que la longueur du tube est égale à celle du boulon, on obtient

$$\frac{Xl}{A_sE_s} + \frac{Xl}{A_cE_c} = \frac{1}{4}h,$$

d'où,

$$X = \frac{hA_sE_s}{4l\left(1 + \frac{A_sE_s}{A_cE_c}\right)} = \frac{0{,}3 \times 6 \times 21 \times 10^5}{4 \times 63\left(1 + \frac{21}{22}\right)} = 7\,674 \text{ daN}.$$

La contrainte de traction dans le boulon est $\sigma_s = X/A_s = 1\,279$ bars. La contrainte de compression dans le tube est $\sigma_c = X/A_c = 639$ bars.

9. Comment sont modifiées les contraintes du problème précédent lorsqu'on exerce sur les extrémités du boulon une traction $P = 2\,500$ daN.

Solution. Soit X l'augmentation de la traction dans le boulon et Y la diminution de compression dans le tube. La condition d'équilibre donne

$$X + Y = P. \qquad (i)$$

On obtient une seconde équation en exprimant que les allongements unitaires du boulon et du tube, dus à l'application des efforts P, sont égaux, c'est-à-dire,

$$\frac{X}{A_sE_s} = \frac{Y}{A_cE_c}. \qquad (j)$$

On détermine les efforts X et Y en résolvant les équations (i) et (j).

10. Une barre prismatique à extrémités encastrées est sollicitée axialement, en deux sections intermédiaires (fig. 25), par les charges P_1 et P_2. Déterminer les réactions R et R_1.

Suggestion. Utiliser l'équation (d) de la page 22 qui permet de calculer les réactions produites par chaque charge séparément, et ensuite, on additionne ces réactions. Déterminer ces dernières lorsque $a = 0{,}3\,l$, $b = 0{,}3\,l$ et $P_1 = P_2 = 454$ daN.

Réponse. $R = 272{,}4$ daN, $R_1 = 408{,}6$ daN.

11. Déterminer les efforts dans les barres du système de la figure 26, où OA représente un axe de symétrie.

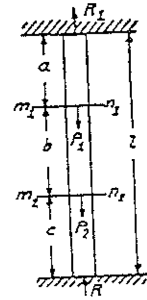
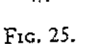



Fig. 25.

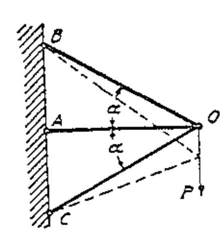


Fig. 26.

Réponse. L'effort de traction dans OB, $P/2 \sin \alpha$, est égal à la compression dans OC. L'effort dans la barre horizontale OA est donc nul.

12. Résoudre le problème 10 en supposant que la partie inférieure de la barre, de longueur c, possède une aire de section droite double de l'aire des deux parties supérieures de longueur a et b.

Réponse. $R = \dfrac{2\,aP_1 + 2\,P_2(l-c)}{2\,l-c}$, $R_1 = \dfrac{P_1(2\,b+c)+cP_2}{2\,l-c}$.

7. Contraintes initiales et thermiques

Pendant le montage des barres d'un système hyperstatique il peut se produire des contraintes initiales. Celles-ci sont dues à d'inévitables erreurs dans les longueurs des barres ou à des erreurs volontaires quant aux longueurs correctes à attribuer aux barres. Ces contraintes s'appellent *contraintes initiales*. De telles contraintes existent même en l'absence de charges externes et ne dépendent que de la géométrie du système, des propriétés mécaniques des matériaux et de l'importance des erreurs. Supposons, par exemple, que le système représenté sur la figure 18 ait, par erreur, un montant de longueur $l+a$ au lieu de l. Après assemblage des barres BO et DO, le montant OC est mis en place, après avoir subi nécessairement une compression, et par conséquent, il exercera une certaine traction sur les barres obliques. Soit X la compression existant après montage de la barre verticale, la traction correspondante dans les barres

obliques sera $X/2 \cos \alpha$ et le déplacement du nœud O, dû à l'allongement de ces barres, est (voir éq. b, p. 21)

$$\delta = \frac{Xl}{2\,A_c E_c \cos^3 \alpha}. \qquad (a)$$

Le raccourcissement du montant est

$$\delta_1 = \frac{Xl}{A_s E_s}. \qquad (b)$$

Il résulte de considérations géométriques élémentaires que le déplacement du nœud O, associé au raccourcissement du montant, est égal à l'erreur a affectant la longueur de ce montant. Cette considération permet de déterminer X à l'aide de l'équation suivante :

$$\frac{Xl}{2\,A_c E_c \cos^3 \alpha} + \frac{Xl}{A_s E_s} = a.$$

Par suite,

$$X = \frac{a A_s E_s}{l\left(1 + \dfrac{A_s E_s}{2\,A_c E_c \cos^3 \alpha}\right)}. \qquad (11)$$

On peut alors calculer les contraintes initiales dans toutes les barres.

La dilatation des barres d'un système, due aux variations de température, a même effet que les inexactitudes dans les longueurs. Considérons une barre à extrémités encastrées. Si l'on porte la température de celle-ci de t_0 à t et que les réactions d'encastrement préviennent toute dilatation thermique, des contraintes de compression apparaîtront dans la barre et leur valeur s'obtient par la condition d'invariabilité de la longueur de la barre. Soit α le coefficient de dilatation thermique et σ la contrainte de compression produite par les réactions. On détermine σ à l'aide de

$$\alpha(t - t_0) = \frac{\sigma}{E},$$

d'où

$$\sigma = E\alpha(t - t_0). \qquad (12)$$

Considérons, comme second exemple, le système de la figure 18 et supposons que le montant vertical passe de la température initiale t_0 à la température t. La dilatation thermique correspondante est partiellement contrariée par les deux barres du système, et des contraintes de compression se développent dans le montant alors que les barres obliques

subissent des contraintes de traction. L'équation (11) donne la valeur de la compression dans la barre verticale, mais on y remplace a, erreur sur la longueur, par la dilatation thermique $\alpha l\,(t-t_0)$ du montant.

Problèmes

1. Les rails d'un tramway ont été soudés ensemble à la température de 10 °C. Calculer les contraintes développées dans ces rails sous l'action du soleil, qui porte leur température à 38 °C. Le coefficient de dilatation thermique de l'acier est 12×10^{-6}.

Réponse. $\sigma = 706$ bars.

2. Quelles sont les variations de contraintes produites, dans le système de la figure 24, par accroissement de la température de t_0 à t, sachant que le coefficient de dilatation de l'acier est α_s et celui du cuivre α_c ?

Solution. Puisque $\alpha_c > \alpha_s$, l'accroissement de la température crée une compression dans le cuivre et une traction dans l'acier. Les allongements unitaires de l'acier et du cuivre sont identiques. Soit X l'augmentation de traction dans le boulon, produite par la variation de température, on obtient

$$\alpha_s(t-t_0)+\frac{X}{A_sE_s}=\alpha_c(t-t_0)-\frac{X}{A_cE_c},$$

d'où

$$X=\frac{(\alpha_c-\alpha_s)(t-t_0)A_sE_s}{1+\dfrac{A_sE_s}{A_cE_c}}.$$

On calcule, par la méthode classique, les variations des contraintes dans le boulon et le tube.

acier
cuivre
acier

Fig. 27.

3. Une bande de cuivre est soudée entre deux bandes d'acier (fig. 27). Quelles contraintes prendront naissance dans l'acier et le cuivre lorsque la température passe de t_0 à t degrés ?

Suggestion. Utiliser la même méthode que dans le problème précédent.

4. Calculer les contraintes produites dans les barres du système représenté sur la figure 18 lorsque la température de toutes les barres s'élève de t_0 à t ?

Solution. Soit X la traction produite dans la barre d'acier par augmentation de la température. On constate, d'après la condition d'équilibre du

nœud O, que les barres de cuivre subissent des compressions égales à $X/2\cos\alpha$; par conséquent l'allongement de la barre d'acier devient

$$\delta=\alpha_s(t-t_0)l+\frac{Xl}{A_sE_s}$$

et l'allongement des barres de cuivre est

$$\delta_1=\alpha_c(t-t_0)\frac{l}{\cos\alpha}-\frac{Xl}{2A_cE_c\cos^2\alpha}.$$

En outre, il résulte de considérations antérieures (voir p. 20) que

$$\delta_1=\delta\cos\alpha.$$

Donc

$$\alpha_s(t-t_0)l+\frac{Xl}{A_sE_s}=\alpha_c(t-t_0)\frac{l}{\cos^2\alpha}-\frac{Xl}{2A_cE_c\cos^3\alpha},$$

d'où

$$X=\frac{(t-t_0)\left(\dfrac{\alpha_c}{\cos^2\alpha}-\alpha_s\right)A_sE_s}{1+\dfrac{1}{2\cos^3\alpha}\dfrac{A_sE_s}{A_cE_c}}.$$

On détermine les contraintes dans l'acier et le cuivre à l'aide des équations suivantes :

$$\sigma_s=\frac{X}{A_s},\qquad \sigma_c=\frac{X}{2A_c\cos\alpha}.$$

5. En supposant que dans le cas de la figure 20 une charge constante $P = 45\,359$ daN soit appliquée à la température initiale t_0, déterminer l'accroissement de température nécessaire pour que la charge soit entièrement transmise au cuivre lorsque $\alpha_s = 12\times10^{-6}$ et $\alpha_c = 17\times10^{-6}$.

Solution.

$$(\alpha_c-\alpha_s)(t-t_0)=\frac{4P}{\pi(D^2-d^2)E_c},$$

d'où

$$t-t_0=23\ °\mathrm{C}.$$

6. Une barre d'acier composée de deux parties de longueur l_1 et l_2, et de sections droites A_1, A_2, est fixée par ses extrémités. Calculer les contraintes thermiques qui s'y développent lorsque la température s'élève de 38 °C. On suppose que $l_1 = l_2$, $A_1 = 2A_2$ et $\alpha_s = 12\times10^{-6}$.

Réponse. $\sigma_1 = 984{,}3$ bars, $\sigma_2 = 1\,968{,}6$ bars.

7. Déterminer les contraintes thermiques du système de la figure 27 lorsque la température des trois bandes augmente de 38 °C. L'épaisseur de chacune des trois bandes est identique et les coefficients de dilatation thermique sont $\alpha_s = 12\times10^{-6}$ et $\alpha_c = 17\times10^{-6}$. On prendra $E_c : E_s = 8 : 15$.

Réponse. $\sigma_c = 195{,}5$ bars en compression, $\sigma_s = 98$ bars en traction.

8. La température du système représenté sur la figure 18 s'élève de 38 °C. Calculer les contraintes thermiques lorsque les trois barres sont en acier et ont même section droite. Prendre $\alpha_s = 12 \times 10^{-6}$ et $E_s = 21 \times 10^5$ bars.

Réponse.

Barre verticale : $\sigma = \dfrac{1\,915 \cos\alpha \sin^2\alpha}{2\cos^3\alpha + 1}$ bars en traction.

Barres obliques : $\sigma = \dfrac{957{,}5 \sin^2\alpha}{2\cos^3\alpha + 1}$ bars en compression.

9. Déterminer les contraintes dans les fils du système de la figure 21, sachant que l'aire de la section droite des fils est 65 mm², la charge $Q = 1\,814$ daN et la température du système s'élève de 5,5 °C. On suppose que $\alpha_c = 17 \times 10^{-6}$, $\alpha_s = 12 \times 10^{-6}$, $E_c = 11 \times 10^5$ bars, $E_s = 21 \times 10^5$ bars.

Réponse. $\sigma_s = 1\,385$ bars, $\sigma_c = 717$ bars.

10. Calculer les contraintes qui se développent dans le système représenté sur la figure 23, lorsque la température de la traverse horizontale supérieure s'élève de t_0 à t degrés.

Réponse. La compression X dans la traverse horizontale supérieure est donnée par l'équation :

$$\alpha(t - t_0)\,a = X\left(\frac{2h\,\mathrm{tg}^2\alpha}{AE} + \frac{2h}{A_1 E \cos^2\alpha \sin\alpha} + \frac{2a}{A_1 E}\right).$$

8. Allongement d'un anneau circulaire

Lorsque des forces radiales uniformément réparties s'exercent sur le contour d'un anneau circulaire mince (fig. 28), celui-ci subit un agrandissement uniforme.

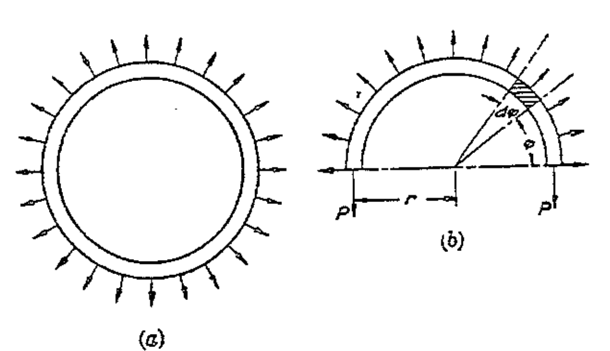


Fig. 28.

Afin de déterminer la traction P agissant sur l'anneau, on considère le demi-anneau supérieur (fig. 28*b*) que l'on assimile à un corps libre. Si q représente la charge uniforme par unité de longueur de ligne moyenne de l'anneau et r le rayon moyen de l'anneau, l'effort agissant sur un élément d'anneau, pris entre deux sections droites voisines, est $qr\,d\varphi$, où $d\varphi$ est l'angle au centre correspondant à l'élément. En faisant la somme des composantes verticales de tous les efforts agissant sur le demi-anneau, on obtient l'équation d'équilibre suivante :

$$2P = 2\int_0^{\pi/2} qr \sin\varphi\, d\varphi = 2qr,$$

d'où

$$P = qr. \tag{13}$$

La contrainte de traction dans l'anneau est alors égale au quotient de l'effort P par l'aire de la section droite de l'anneau [8].

Dans les applications pratiques, la détermination des contraintes de traction dans un anneau animé d'un mouvement de rotation est fréquemment nécessaire. Puisque q représente la force centrifuge par unité de longueur de l'anneau, son équation est

$$q = \frac{w}{g}\frac{v^2}{r}, \tag{14}$$

où w représente le poids de l'anneau par unité de longueur, r est le rayon moyen, v la vitesse de l'anneau au rayon r et g l'accélération de la pesanteur. Remplaçons q par sa valeur dans (13), on obtient

$$P = \frac{wv^2}{g},$$

et la contrainte de traction correspondante dans l'anneau est

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{wv^2}{Ag} = \frac{\gamma v^2}{g}. \tag{15}$$

On remarque que la contrainte est proportionnelle à la densité γ/g du matériau et au carré de la vitesse tangentielle [9]. Considérons un anneau

[8] On verra plus loin (2e partie) que dans le cas d'anneaux minces il est préférable de supposer que les contraintes sont uniformément réparties à travers la section de l'anneau.

[9] Pour un anneau mince la vitesse à la ligne moyenne est confondue avec la vitesse tangentielle.

d'acier et une vitesse $v = 30$ m/s, la contrainte est alors égale à 72 bars. Pour le même matériau et une vitesse quelconque v_1, la contrainte sera égale à $8 \times 10^{-4} v_1^2$, v_1 étant exprimé en m/s.

Problèmes

1. Déterminer la contrainte de traction maximum dans la paroi cylindrique de la presse représentée sur la figure 5, sachant que le diamètre intérieur est 25,4 cm et l'épaisseur de la paroi 2,54 cm.

Solution. La pression hydrostatique maximum p dans le cylindre s'obtient à l'aide de l'équation :

$$p \cdot \frac{\pi\, 25{,}4^2}{4} = 45\,400 \text{ daN},$$

d'où $p = 89{,}3$ bars. Considérons un anneau élémentaire du cylindre de largeur 2,54 cm suivant l'axe du cylindre et utilisons l'équation (13) dans laquelle nous faisons $q = p = 89{,}3$ bars et $r = 12{,}70$ cm, l'on obtient

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{89{,}3 \times 12{,}70}{2{,}54 \times 2{,}54} = 175{,}6 \text{ bars}.$$

2. Un tube de cuivre est emmanché sur un tube d'acier porté à une haute température t (fig. 29), le frettage s'opère de telle sorte qu'il n'y ait aucune pression entre les deux tubes à cette température. Déterminer les contraintes qui se développent dans le cuivre et l'acier pendant le refroidissement à la température ambiante t_0. Soit d le diamètre extérieur du tube d'acier, h_s son épaisseur et h_c celle du tube de cuivre.

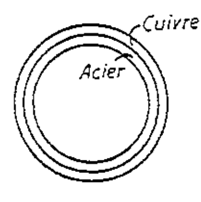


FIG. 29.

Solution. Etant donné la différence entre les coefficients de dilatation α_c et α_s, il existe une pression entre les tubes extérieur et intérieur après refroidissement. Soit x la pression, la contrainte de traction dans le tube de cuivre est

$$\sigma_c = \frac{xd}{2\, h_c}$$

et la contrainte de compression dans l'acier

$$\sigma_s = \frac{xd}{2\, h_s}.$$

On détermine alors la pression x d'après le fait que les deux tubes ont même contraction périphérique durant le refroidissement ; par suite

$$\alpha_c (t - t_0) - \frac{xd}{2\, E_c h_c} = \alpha_s (t - t_0) + \frac{xd}{2\, E_s h_s},$$

d'où

$$\sigma_c = \frac{xd}{2\, h_c} = \frac{(\alpha_c - \alpha_s)(t - t_0) E_c}{1 + \dfrac{h_c}{h_s} \dfrac{E_c}{E_s}}$$

On calcule de la même manière la contrainte dans l'acier.

3. Se référant à la figure 29, quelle contrainte de traction supplémentaire apparaît dans le tube lorsqu'il est soumis à une pression hydrostatique interne $p = 7$ bars ; le diamètre intérieur est $d_1 = 10$ cm, $h_s = 2{,}5$ mm et $h_c = 4{,}7$ mm ?

Solution. Considérons un anneau élémentaire du tube de largeur 1 cm, l'effort de traction total s'exerçant sur l'anneau est

$$P = \frac{pd_1}{2} = 35 \text{ daN}.$$

Puisque les allongements circonférentiels unitaires sont les mêmes dans le cuivre et l'acier, les contraintes sont proportionnelles aux modules, c'est-à-dire, la contrainte dans le cuivre représente les 8/15 de celle de l'acier. De même la section du cuivre représente les 15/8 de celle de l'acier ; par suite l'effort P est également réparti entre les deux métaux et la contrainte de traction dans le cuivre, produite par la pression hydrostatique, est

$$\sigma_c = \frac{P}{2\, h_c} = \frac{35}{2 \times 0{,}47} = 37 \text{ bars}.$$

La contrainte dans l'acier est

$$\sigma_s = \frac{15}{8}\, \sigma_c = 69 \text{ bars}.$$

4. Un anneau composé est constitué par un anneau intérieur en cuivre et un anneau extérieur en acier. Le diamètre intérieur de l'anneau d'acier est inférieur de la quantité δ au diamètre extérieur de l'anneau de cuivre, et le système est emmanché après chauffage préalable de l'anneau d'acier. Après refroidissement l'anneau d'acier comprime l'anneau de cuivre (contrainte de frettage). Déterminer les contraintes dans l'acier et le cuivre après montage, en supposant que les deux anneaux ont des sections rectangulaires de dimensions h_s et h_c suivant le rayon et des dimensions égales à l'unité suivant la perpendiculaire au plan de l'anneau. Les dimensions h_s et h_c sont négligeables par rapport du diamètre d de la surface de contact des deux anneaux.

Solution. Soit x la pression uniformément répartie sur la surface de contact des deux anneaux, les contraintes de compression dans le cuivre et de traction dans l'acier s'obtiennent par les équations :

$$\sigma_c = \frac{xd}{2\, h_c}, \qquad \sigma_s = \frac{xd}{2\, h_s}. \qquad (a)$$

La diminution du diamètre extérieur de l'anneau de cuivre est

$$\delta_1 = \frac{\sigma_c}{E_c} \cdot d = \frac{xd^2}{2\,h_c E_c}.$$

L'accroissement du diamètre intérieur de l'anneau d'acier est

$$\delta_2 = \frac{\sigma_s}{E_s} \cdot d = \frac{xd^2}{2\,h_s E_s}.$$

La pression x est déterminée par l'équation :

$$\delta_1 + \delta_2 = \frac{xd^2}{2}\left(\frac{1}{h_c E_c} + \frac{1}{h_s E_s}\right) = \delta,$$

d'où

$$x = \frac{2\,\delta h_s E_s}{d^2\left(1 + \dfrac{h_s E_s}{h_c E_c}\right)}.$$

Les équations (*a*) nous donnent les contraintes σ_s et σ_c :

$$\sigma_c = \frac{\delta}{d} \cdot \frac{h_s}{h_c} \cdot \frac{E_s}{1 + \dfrac{h_s E_s}{h_c E_c}}, \qquad \sigma_s = \frac{\delta}{d} \cdot \frac{E_s}{1 + \dfrac{h_s E_s}{h_c E_c}}.$$

5. Déterminer les contraintes provoquées, dans l'anneau composé du problème précédent, par la rotation de celui-ci à une vitesse constante n tr/mn.

Solution. Puisque le cuivre a une densité supérieure et un module d'élasticité inférieur à l'acier, l'anneau de cuivre exerce une pression sur l'anneau d'acier pendant la rotation. Soit x la pression sur la surface de contact des deux anneaux. Les équations (*a*) du problème précédent donnent alors les contraintes correspondantes. Il y a lieu d'ajouter à ces contraintes celles dues aux forces centrifuges. Soit γ_c et γ_s les poids spécifiques de l'acier et du cuivre, à l'aide de (15), on obtient :

$$\sigma_s = \frac{\gamma_s}{g}\left(\frac{2\,\pi n}{60}\right)^2\left(\frac{d+h_s}{2}\right)^2, \qquad \sigma_c = \frac{\gamma_c}{g}\left(\frac{2\,\pi n}{60}\right)^2\left(\frac{d-h_c}{2}\right)^2.$$

Associons ces contraintes à celles dues à la pression x et remarquons que l'allongement unitaire des deux anneaux est le même, on obtient alors l'équation permettant de déterminer x :

$$\frac{1}{E_s}\left[\frac{\gamma_s}{g}\left(\frac{2\,\pi n}{60}\right)^2\left(\frac{d+h_s}{2}\right)^2 + \frac{xd}{2\,h_s}\right] = \frac{1}{E_c}\left[\frac{\gamma_c}{g}\left(\frac{2\,\pi n}{60}\right)^2\left(\frac{d-h_c}{2}\right)^2 - \frac{xd}{2\,h_c}\right].$$

Cette équation nous donne la valeur de x pour chaque cas particulier. Connaissant x, la contrainte totale dans le cuivre et l'acier s'obtient sans difficultés.

6. Déterminer la vitesse limite tangentielle d'un anneau mince en cuivre, sachant que la contrainte d'utilisation est $\sigma_W = 211$ bars et $\gamma_c = 8,8$ daN/dm³.

Réponse. $v = 48,4$ m/s.

7. Se référant au problème 2 et à la figure 29, déterminer la contrainte dans le cuivre à la température ambiante, lorsque $t - t_0 = 38$ °C, $\alpha_c - \alpha_s = 5 \times 10^{-6}$ et $h_s = h_c$.

Réponse. $\sigma_c = 161,7$ bars.

8. Se référant au problème 5, déterminer le nombre de révolutions n par minute pour lequel la contrainte dans l'anneau de cuivre est nulle. On suppose que la contrainte initiale dans l'anneau de cuivre est une compression égale à σ_0, et $h_c = h_s$, $E_s = 2\,E_c$.

Réponse. On obtient le nombre de révolutions n à l'aide de l'équation :

$$3\,\sigma_0 = \left(\frac{2\,\pi n}{60}\right)^2\left[\frac{\gamma_c}{g}\left(\frac{d-h_c}{2}\right)^2 + \frac{\gamma_s}{g}\left(\frac{d+h_s}{2}\right)^2\right].$$

9. Calculer les contraintes dans l'anneau composé du problème 4, on suppose que $\delta = 0,002\,5$ cm, $d = 10$ cm, $h_s = h_c$ et $E_s/E_c = 15/8$. Déterminer les variations de ces contraintes lorsque la température des anneaux augmente de 6 °C, après montage. Prendre $\alpha_c = 17 \times 10^{-6}$ et $\alpha_s = 12 \times 10^{-6}$.

Réponse. $\sigma_c = \sigma_s = 183,5$ bars. Variation des contraintes $= 26,2$ bars.

10. Déterminer, dans le problème 5, les contraintes dans l'acier et le cuivre lorsque $n = 3\,000$ tr/mn, $d = 0,61$ m, $h_s = h_c = 1,27$ cm, $\gamma_s = 7,8$ daN/dm³ et $\gamma_c = 8,8$ daN/dm³.

2

ANALYSE DE LA CONTRAINTE ET DE LA DÉFORMATION

9. Contraintes, sur plans inclinés, de traction et compression simples

En étudiant les contraintes dans une barre prismatique soumise à une traction axiale P, nous n'avons considéré (§ 2) que la contrainte à travers les sections perpendiculaires à l'axe de la barre. Considérons le cas où la section transversale pq (fig. 30*a*), perpendiculaire au plan de la figure, est inclinée sur l'axe. Puisque toutes les fibres longitudinales ont le même allongement (voir p. 4), les efforts représentant l'action de la partie droite de la barre sur la partie gauche sont uniformément répartis sur la section pq. La partie gauche de la barre (fig. 30*b*) est en équilibre sous l'action de ces efforts et de l'effort externe P appliqué à l'extrémité gauche. Par suite, la résultante des efforts répartis sur la section pq est égale à P. Soit A l'aire de la section normale à l'axe de la barre et φ l'angle que fait l'axe x avec la normale n à la section pq, l'aire de la section pq est $A/\cos\varphi$ et la contrainte s sur cette section est

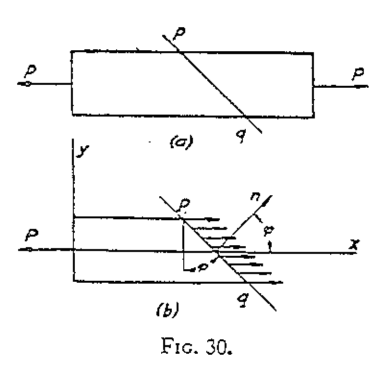


FIG. 30.

$$s = \frac{P\cos\varphi}{A} = \sigma_x \cos\varphi\,, \qquad (16)$$

où $\sigma_x = P/A$ représente la contrainte sur la section normale à l'axe de la barre. On constate que la contrainte s sur toute section inclinée de la barre est inférieure à la contrainte σ_x sur la section normale à l'axe de la barre, et qu'elle diminue lorsque φ augmente. Pour $\varphi = \pi/2$ la section pq est parallèle à l'axe de la barre et la contrainte s est nulle, ce qui indique que la pression entre les fibres longitudinales de la barre est nulle.

La contrainte s, *définie par l'équation* (16), a la même direction que l'effort P et n'est pas perpendiculaire à la section pq. Dans ce cas il est plus classique de dissocier la contrainte totale en deux composantes (voir fig. 31). La composante de la contrainte σ_n perpendiculaire à la section transversale est appelée *contrainte normale*. Elle a pour valeur

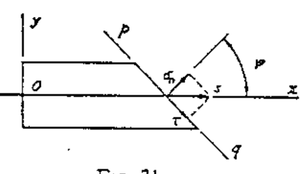


FIG. 31.

$$\sigma_n = s\cos\varphi = \sigma_x \cos^2\varphi\,. \qquad (17)$$

La composante tangentielle τ est appelée *contrainte de cisaillement* et sa valeur est

$$\tau = s\sin\varphi = \sigma_x \cos\varphi \sin\varphi = \frac{\sigma_x}{2}\sin 2\varphi\,. \qquad (18)$$

Pour représenter la déformation produite par chacune des composantes, considérons un élément mince découpé dans la barre par deux sections parallèles voisines pq et p_1q_1 (fig. 32*a*). Les contraintes agissant sur cet élément sont représentées sur la figure 32*a*. Les figures 32*b* et 32*c* s'obtiennent par décomposition de ces contraintes en composantes normale et tangentielle, elles montrent séparément l'action de chacune de ces composantes. On remarque que les *contraintes normales* σ_n créent un allongement de l'élément suivant la normale n à la section pq, tandis que les contraintes de cisaillement produisent un glissement de la section pq par rapport à p_1q_1.

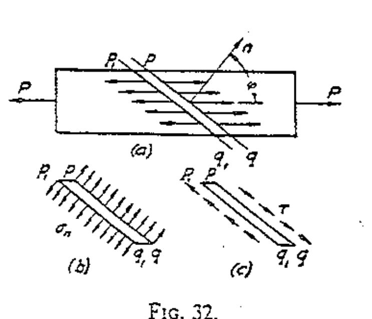


FIG. 32.

D'après l'équation (17) on remarque que la *contrainte normale maximum* agit sur les sections normales à l'axe de la barre et a pour valeur

$$(\sigma_n)_{max} = \sigma_x\,.$$

La *contrainte de cisaillement maximum* (voir éq. 18) agit sur les sections inclinées de 45° sur l'axe de la barre, sa valeur est

$$\tau_{max} = \tfrac{1}{2}\sigma_x\,. \qquad (19)$$

puisque $\sin 2\varphi = 1$. Bien que la contrainte de cisaillement maximum soit la moitié de la contrainte normale maximum, elle constitue le facteur de contrôle pour l'étude de la résistance limite des matériaux plus faibles

en cisaillement qu'en traction. Par exemple, pour l'essai de traction d'une barre d'acier doux à surface polie, un écoulement visible du métal s'opère suivant des lignes inclinées, appelées *lignes de Lueder* (fig. 33). L'écoulement se produit suivant des plans inclinés sur lesquels la contrainte de cisaillement est maximum et pour une valeur de l'effort P correspondant

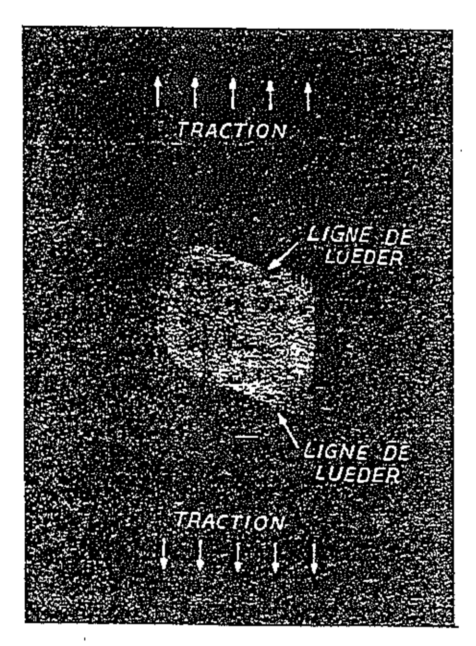


Fig. 33.

au point B de la figure 4*a*. Ceci prouve que, dans le cas de l'acier doux, la rupture se produit lorsque la contrainte de cisaillement maximum est atteinte et bien que celle-ci ne soit que la moitié de la contrainte normale maximum.

Les formules (17) et (18), calculées pour une barre en traction, peuvent aussi être utilisées en compression. La contrainte de traction est supposée positive, la compression négative. Par suite, pour une barre sous compression axiale il suffit de prendre σ_x négatif dans les formules (17) et (18). Le signe moins de σ_x indique que dans le cas de la figure 32*b* on obtient, au lieu d'une traction, une compression sur l'élément mince pris entre les sections adjacentes pq et p_1q_1. Le signe négatif de τ dans la

formule (18) montre que pour une compression de la barre l'action de cisaillement sur l'élément a une direction opposée à celle indiquée sur la figure 32*c*. La figure 34 donne les conventions de signes employées pour les contraintes normales et de cisaillement. On utilise le signe positif, dans le cas du cisaillement, lorsque les contraintes de cisaillement forment un couple dans le sens des aiguilles d'une montre, et le signe négatif dans le sens opposé.

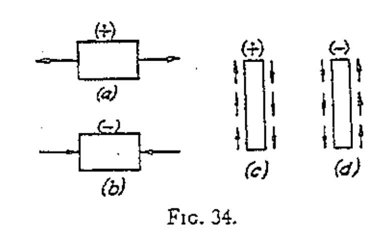


Fig. 34.

Problèmes

1. Montrer que les couples des figures 32*b* et 32*c* s'équilibrent.

2. Une barre prismatique de section transversale A est soumise à une compression axiale créée par un effort $P = 5$ kN. Calculer σ_n et τ pour un plan incliné de 45° sur l'axe de la barre.

Réponse. $$\sigma_n = \pm\tau = -\frac{2\,500}{A}\ \text{bars}.$$

3. Déterminer la variation de la distance entre les plans pq et p_1q_1, de la figure 32*a*, produite par les efforts $P = 13{,}608$ kN, sachant que la distance initiale entre ces deux plans est 1,27 cm, l'aire de la section $A = 6{,}45$ cm² et $\varphi = 45°$.

Réponse. $\delta = 0{,}000\,6$ cm.

4. Calculer l'angle φ (fig. 32*a*) définissant le plan pq pour lequel (1) la contrainte normale σ_n est la moitié de la contrainte maximum σ_x, (2) la contrainte de cisaillement τ est le tiers de σ_n.

Réponse. (1) $\varphi = \pm 45°$; (2) $\varphi = \text{arctg}\,\frac{1}{3}$.

10. Cercle de Mohr

On peut représenter graphiquement les formules (17) et (18) (¹). Pour cela on considère un système de coordonnées rectangulaires d'origine O

(¹) Cette représentation graphique est due à O. Mohr, *Civilingenieur*, p. 113, 1882. Voir aussi son *Abhandlungen aus dem Gebiete der technischen Mechanik*, p. 219, Berlin, 1906. Ce dernier ouvrage donne toutes les références sur les autres publications concernant le sujet en question.

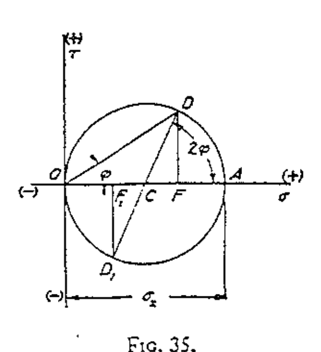


Fig. 35.

et orienté comme l'indique la figure 35. Soit le cas où la section pq est perpendiculaire à l'axe de la barre, nous avons alors $\varphi = 0$, figure 31, et l'on trouve, à l'aide des formules (17) et (18), $\sigma_n = \sigma_x$, $\tau = 0$. Choisissons une échelle pour les contraintes et portons les composantes normales sur l'axe horizontal et les composantes du cisaillement sur l'axe vertical, la contrainte agissant sur le plan $\varphi = 0$ est représentée, sur la figure 35, par le point A d'abscisse égale à σ_x et d'ordonnée nulle. Considérons alors un plan parallèle à l'axe de la barre, nous avons $\varphi = \pi/2$, on remarque, dans ce cas, que les deux composantes de la contrainte disparaissent, on en conclut que l'origine O (fig. 35) correspond à ce plan. Traçons ensuite le cercle de diamètre $\overline{OA}$, on démontre aisément que les composantes de la contrainte, pour toute section pq et pour un angle φ pris arbitrairement (fig. 31), peuvent être représentées par les coordonnées d'un point de ce cercle. Pour obtenir un point sur le cercle, correspondant à un angle défini φ, il suffit de décrire, à partir du point A et dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, un arc sous-tendant un angle égal à $2\,\varphi$. Soit D le point ainsi obtenu, d'après la figure nous avons :

$$\overline{OF} = \overline{OC} + \overline{CF} = \tfrac{1}{2}\sigma_x + \tfrac{1}{2}\sigma_x \cos 2\,\varphi = \sigma_x \cos^2 \varphi\,,$$

$$\overline{DF} = \overline{CD} \sin 2\,\varphi = \tfrac{1}{2}\sigma_x \sin 2\,\varphi\,.$$

Comparons ces expressions des coordonnées du point D aux formules (17) et (18), on remarque que ce point définit les contraintes agissant sur le plan pq (fig. 31). Lorsque la section pq tourne dans le sens trigonométrique autour d'un axe perpendiculaire au plan de la figure 31, φ variant de 0 à $\pi/2$, le point D se déplace de A vers O, si bien que le demi-cercle supérieur détermine les contraintes pour toutes les valeurs de φ comprises entre ces limites. Si l'angle est supérieur à $\pi/2$ on obtient une section transversale (voir fig. 36a) coupée par un plan mm dont la normale extérieure (²) n_1 fait avec l'axe x un angle supérieur à $\pi/2$. Décrivons, à partir du point A, un angle $2\,\varphi$ dans le sens trigonométrique (fig. 35), on obtient alors un point du demi-cercle inférieur.

(²) La partie de la barre sur laquelle agissent les contraintes est hachurée. La normale extérieure n_1 est dirigée vers l'extérieur de cette partie.

Prenons, par exemple, le cas où mm est perpendiculaire à la section pq, précédemment considérée. Dans ce cas, le point correspondant, sur le cercle de la figure 35, est le point D_1 tel que DOD_1 soit égal à $\pi/2$; ainsi DD_1 est un diamètre du cercle. A partir des coordonnées du point D_1 on trouve les composantes σ_{n_1} et τ_1 de la contrainte relative au plan mm :

$$\sigma_{n_1} = \overline{OF_1} = \overline{OC} - \overline{F_1C} = \tfrac{1}{2}\sigma_x - \tfrac{1}{2}\sigma_x \cos 2\,\varphi = \sigma_x \sin^2 \varphi\,, \qquad (20)$$

$$\tau_1 = -\overline{F_1D_1} = -\overline{CD_1} \sin 2\,\varphi = -\tfrac{1}{2}\sigma_x \sin 2\,\varphi\,.\ (^3) \qquad (21)$$

Comparons ces résultats aux expressions (17) et (18), on trouve :

$$\sigma_n + \sigma_{n_1} = \sigma_x \cos^2 \varphi + \sigma_x \sin^2 \varphi = \sigma_x\,, \qquad (22)$$

$$\tau_1 = -\tau\,. \qquad (23)$$

Ceci prouve que la somme des contraintes normales agissant sur deux plans perpendiculaires reste constante et égale à σ_x. Les contraintes de cisaillement agissant sur deux plans perpendiculaires sont numériquement égales mais de sens contraires.

En prenant des sections transversales adjacentes m_1m_1 *et* p_1q_1, parallèles à mm et pq (fig. 36a), on isole un élément sur lequel, comme

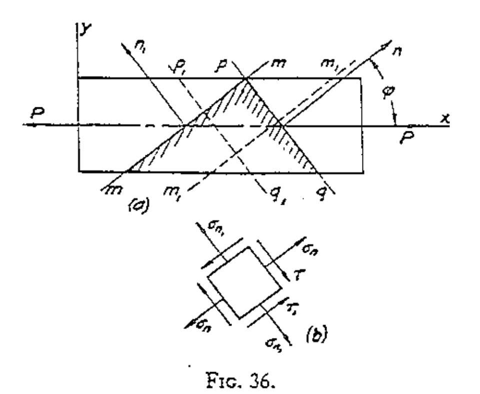


Fig. 36.

l'indique la figure 36b, sont portées les directions des contraintes développées. On remarque que les contraintes de cisaillement, agissant sur les côtés de l'élément parallèles au plan pq, créent un couple orienté dans le sens des aiguilles d'une montre, lequel, en vertu de la convention définie

(³) On prend le signe moins puisque D_1 est situé du côté des ordonnées négatives.

par la figure 34*c*, doit être positif. Les contraintes de cisaillement agissant sur les deux autres côtés de l'élément produisent un couple d'orientation inverse par rapport au sens des aiguilles d'une montre. Ce couple est négatif d'après la figure 34*d*.

Le cercle de la figure 35, appelée *cercle des contraintes* ou *cercle de Mohr*, est utilisé pour la détermination des composantes σ_n et τ de la contrainte relative à une section transversale *pq*, dont la normale fait un angle quelconque avec l'axe x (fig. 31). On utilise une construction analogue pour résoudre le problème inverse, c'est-à-dire, lorsqu'il faut calculer la contrainte de traction σ_x suivant la direction axiale et l'angle φ, connaissant les composantes σ_n et τ. On constate que l'angle formé par la corde OD et l'axe x est égal à φ (voir fig. 35). Par suite, après avoir construit le point D de coordonnées σ_n et τ on obtient l'angle φ en traçant le segment de droite OD. Connaissant φ, on peut tracer le rayon RC faisant un angle 2φ avec l'axe OC et l'on obtient enfin le centre C du cercle des contraintes. Le diamètre de ce cercle donne la contrainte cherchée σ_x.

Problèmes

1. Déterminer σ_n et τ analytiquement puis graphiquement, sachant que $\sigma_x = 1\,000$ bars et $\varphi = 30°$ ou $120°$. Isoler un élément orienté suivant les angles 30° et 120°, comme l'indique la figure 36*b*, et marquer par des flèches les directions des contraintes agissant sur l'élément.

2. Résoudre le problème précédent en remplaçant la contrainte de traction σ_x par une contrainte de compression de même valeur. On remarquera que, dans ce cas, le diamètre du cercle (fig. 35) se trouve sur le demi-axe négatif des abscisses.

3. Un plan *pq* (fig. 31) est soumis à une contrainte normale $\sigma_n = 843{,}6$ bars et à une contrainte de cisaillement $\tau = 281{,}2$ bars. Trouver l'angle φ et la contrainte σ_x.

Réponse. $\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{3}, \quad \sigma_x = \frac{\sigma_n}{\cos^2\varphi} = 937{,}2$ bars.

4. Sur les deux côtés perpendiculaires de l'élément de la figure 36*b* agissent les contraintes normales $\sigma_n = 843{,}6$ bars et $\sigma_{n_1} = 421{,}8$ bars. Déterminer σ_x et τ.

Réponse. $\sigma_x = 1\,265{,}4$ bars ; $\tau = \pm 596{,}6$ bars.

5. Déterminer la contrainte de cisaillement maximum dans le cas du problème 1.

6. Déterminer l'inclinaison des sections transversales pour lesquelles les contraintes normale et de cisaillement sont numériquement égales.

Réponse. $\varphi = \frac{\pi}{4}$ et $\varphi = \frac{3\pi}{4}$.

11. Traction ou compression suivant deux directions perpendiculaires

Dans certains cas le matériau d'une construction est soumis à l'action d'une traction ou d'une compression suivant deux directions perpendiculaires. Prenons par exemple le cas des contraintes agissant sur la paroi cylindrique d'une chaudière sous pression interne (*) p. Considérons un élément infinitésimal découpé dans la paroi cylindrique de la chaudière par deux plans axiaux voisins et par deux sections circonférentielles (voir fig. 37*a*). Sous l'effet de la pression interne le cylindre se dilate simultanément suivant les directions circonférentielle et axiale. La contrainte

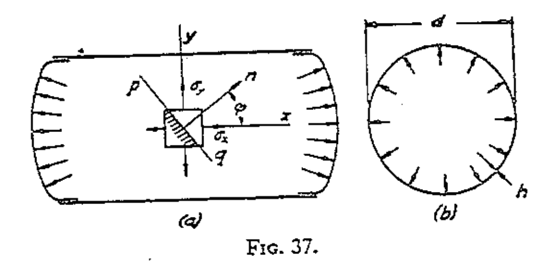


FIG. 37.

de traction σ_y suivant la circonférence se calcule de la même manière que dans le cas d'un anneau circulaire (§ 8). Soit d le diamètre intérieur de la chaudière et h l'épaisseur de la paroi, cette contrainte est

$$\sigma_y = \frac{pd}{2h}. \qquad (24)$$

Pour calculer la contrainte de traction σ_x suivant l'axe, on suppose la chaudière coupée par un plan perpendiculaire à l'axe x. Considérons l'équilibre de l'une des parties de la chaudière : on remarque que l'effort de traction produisant un allongement longitudinal de la chaudière est

(*) Plus précisément p désigne la différence entre la pression interne et la pression atmosphérique.

égal à la résultante de la pression sur les extrémités de la chaudière, c'est-à-dire.

$$P = p\left(\frac{\pi d^2}{4}\right).$$

L'aire de la section transversale de la paroi est ([5])

$$A = \pi dh .$$

Par suite,

$$\sigma_x = \frac{P}{A} = \frac{pd}{4h}. \tag{25}$$

On remarque que l'élément de la paroi subit des contraintes de traction σ_x et σ_y suivant deux directions perpendiculaires ([6]). Dans ce cas la contrainte de traction σ_y, suivant la circonférence, est le double de σ_x suivant l'axe.

Dans le cas général, considérons la contrainte agissant sur une section transversale quelconque pq (fig. 37*a*), perpendiculaire au plan xy et dont la normale n fait un angle φ avec l'axe x. A l'aide des formules (17) et (18) du paragraphe précédent, on conclut que la contrainte de traction σ_x, agissant suivant l'axe, produit sur le plan pq des contraintes normale et de cisaillement de valeur :

$$\sigma'_n = \sigma_x \cos^2\varphi , \qquad \tau' = \tfrac{1}{2}\sigma_x \sin 2\varphi . \tag{a}$$

Pour calculer les composantes de la contrainte créée dans le même plan pq par la contrainte de traction σ_y, on remarque que l'angle entre σ_y et la normale n (fig. 37*a*) est égal à $(\pi/2)-\varphi$, et il est compté dans le sens des aiguilles d'une montre à partir de l'axe y, alors que φ est mesuré en sens inverse à partir de l'axe x. On en conclut que l'utilisation des équations (17) et (18) nous oblige à substituer, dans ce cas, σ_y à σ_x et $-(\frac{1}{2}\pi-\varphi)$ à φ. Ce qui donne :

$$\sigma''_n = \sigma_y \sin^2\varphi , \qquad \tau'' = -\tfrac{1}{2}\sigma_y \sin 2\varphi . \tag{b}$$

Additionnons les composantes (*a*) et (*b*) de la contrainte due respectivement aux contraintes σ_x et σ_y ; on obtient alors les contraintes résultantes

([5]) L'épaisseur de la paroi est supposée petite par rapport au diamètre et l'on utilise alors la formule approchée de la section.

([6]) Il existe aussi une pression s'exerçant sur la surface cylindrique intérieure de l'élément mais elle est faible en comparaison de σ_x et σ_y ; elle sera donc négligée dans l'étude ultérieure.

normale et de cisaillement sur un plan incliné, dans le cas d'une traction suivant deux directions perpendiculaires :

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2\varphi + \sigma_y \sin^2\varphi , \tag{26}$$

$$\tau = \tfrac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\sin 2\varphi . \tag{27}$$

12. Cercle de Mohr des contraintes associées

Opérons comme au paragraphe 10, on obtient une représentation graphique des formules (26) et (27) à l'aide du cercle de Mohr ou cercle des contraintes. Supposons encore que les abscisses et les ordonnées représentent à une certaine échelle les composantes normale et tangentielle de la contrainte, on conclut que les points A et B (fig. 38), d'abscisses σ_x et σ_y, représentent les contraintes agissant sur les côtés de l'élément de la figure 37*a*, respectivement perpendiculaires aux axes x et y. Pour obtenir les composantes de la contrainte sur un plan incliné quelconque, défini par un angle φ (fig. 37*a*), il suffit de construire un cercle de diamètre AB et de tracer le rayon CD faisant un angle ACD égal à 2φ, mesuré dans le sens trigonométrique à partir du point A. D'après la figure on conclut que

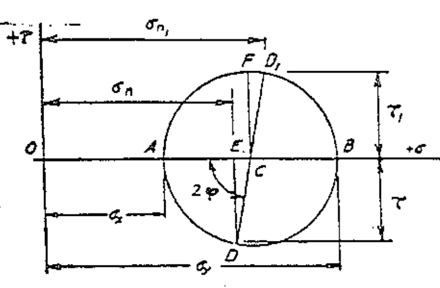


Fig. 38.

$$\overline{OE} = \overline{OC} - \overline{CE} = \tfrac{1}{2}(\overline{OA}+\overline{OB}) - \tfrac{1}{2}(\overline{OB}-\overline{OA})\cos 2\varphi$$
$$= \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} - \frac{\sigma_y-\sigma_x}{2}\cos 2\varphi = \sigma_x\cos^2\varphi + \sigma_y \sin^2\varphi .$$

Cette relation exprime que l'abscisse $\overline{OE}$ du point D sur le cercle, mesurée à une échelle établie, donne la composante de la contrainte normale σ_n (voir éq. 26).

L'ordonnée du point D est

$$\overline{DE} = \overline{CD}\sin 2\varphi = \frac{\sigma_y-\sigma_x}{2}\sin 2\varphi .$$

Observant que cette ordonnée peut s'écrire avec le signe moins, on conclut qu'elle permet de calculer la composante de la contrainte de cisaillement τ (éq. 27), lorsqu'on choisit le signe approprié.

Lorsque le plan pq tourne dans le sens inverse des aiguilles d'une montre par rapport à un axe perpendiculaire au plan xy (fig. 37*a*), le point correspondant D se déplace en sens inverse des aiguilles d'une montre le long du cercle des contraintes (fig. 38), si bien que pour chaque valeur de φ, les valeurs correspondantes des composantes σ_n et τ sont définies comme coordonnées du point D.

D'après cette représentation graphique des formules (26) et (27) il découle immédiatement, dans le cas présent (¹), que la composante de la contrainte normale maximum est égale à σ_y et la contrainte de cisaillement maximum, représentée par le rayon $\overline{CF}$ du cercle de la figure 38, est

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}, \tag{28}$$

elle se produit pour $\sin 2\varphi = -1$, c'est-à-dire, pour $\varphi = 3\pi/4$. La même valeur de la contrainte de cisaillement, précédée du signe contraire, agit sur le plan défini par $\varphi = \pi/4$.

Considérons deux plans perpendiculaires définis par les angles φ et $(\pi/2)+\varphi$ que font les normales n et n_1 avec l'axe x, les composantes de la contrainte correspondante sont déterminées par les coordonnées des points D et D_1 de la figure 38, et l'on conclut que :

$$\sigma_n + \sigma_{n_1} = \sigma_x + \sigma_y, \tag{29}$$

$$\tau_1 = -\tau. \tag{30}$$

Ces relations prouvent que la somme des contraintes normales agissant sur deux plans perpendiculaires reste constante lorsque φ varie. Les

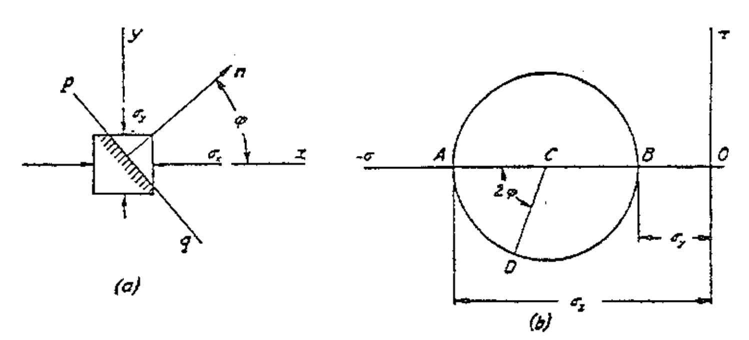


FIG. 39.

(¹) On ne tient compte que des plans perpendiculaires au plan xy. Pour un cas plus général, voir paragraphe 18.

contraintes de cisaillement agissant sur deux plans perpendiculaires sont égales mais de signes contraires.

On peut aussi concevoir un cercle des contraintes, semblable à celui de la figure 38, si l'une ou les deux contraintes σ_x et σ_y sont compressives. Il suffit pour cela de mesurer les compressions sur le demi-axe négatif des abscisses. Supposons, par exemple, que les contraintes agissant sur un élément se présentent comme l'indique la figure 39*a*, le cercle correspondant étant tracé sur la figure 39*b*. Les composantes de la contrainte agissant sur un plan pq de normale n, sont représentées par les coordonnées du point D du diagramme.

Problèmes

1. Soit $d = 2{,}54$ m, $h = 1{,}27$ cm, le diamètre et l'épaisseur de la chaudière représentée sur la figure 37. Déterminer σ_x et σ_y, sachant que $p = 7$ bars. Isoler un petit élément de la chaudière par des plans pour lesquels $\varphi = 30°$ et $120°$, et déterminer, en grandeur et en sens, les composantes de la contrainte agissant sur les côtés de cet élément.

2. Déterminer les contraintes σ_n, σ_{n_1}, τ et τ_1 lorsque, sur la figure 39*a*, $\sigma_x = 703$ bars, $\sigma_y = -351{,}5$ bars et $\varphi = 30°$, $\varphi_1 = 120°$.

Réponse. $\sigma_n = 439{,}4$ bars, $\sigma_{n_1} = -87{,}9$ bars, $\tau = -\tau_1 = 457$ bars.

3. Déterminer σ_n, σ_{n_1}, τ et τ_1 dans le problème précédent, pour un angle φ choisi de manière que τ soit maximum.

Réponse. $\sigma_n = \sigma_{n_1} = 175{,}8$ bars, $\tau = -\tau_1 = 527{,}4$ bars.

13. Contraintes principales

Nous avons démontré, au paragraphe précédent, que dans le cas d'une traction ou d'une compression suivant deux directions perpendiculaires x, y, l'une des deux contraintes normales, σ_x ou σ_y, était maximum et l'autre minimum. Pour tous les plans inclinés, tels que les plans pq des figures 37*a* et 39*a*, la valeur de la contrainte normale σ_n est comprise entre ces valeurs limites. En même temps s'exercent sur tous ces plans non seulement des contraintes normales σ_n mais aussi des contraintes de cisaillement τ. Les contraintes σ_x et σ_y, dont l'une est contrainte normale maximum et l'autre contrainte normale minimum, sont appelées *contraintes principales* et les deux plans perpendiculaires sur lesquels elles s'exercent

sont les *plans principaux*. Aucune contrainte de cisaillement ne se développe sur les plans principaux.

Dans l'exemple du paragraphe précédent (fig. 37) les contraintes principales σ_x et σ_y ont été déterminées à partir de considérations très simples et il a fallu pour cela calculer les expressions des composantes de la contrainte normale et de cisaillement agissant sur tout plan quelconque incliné, tel que le plan pq (voir fig. 37*a*). Dans l'étude ultérieure (voir p. 121) on analysera le problème inverse. On déterminera les contraintes normale et de cisaillement agissant sur deux plans perpendiculaires, et cela nécessitera la recherche des valeurs et des directions des contraintes principales. La méthode la plus simple de résolution du problème est l'utilisation du cercle des contraintes représenté sur la figure 38. Supposons que les contraintes agissent, comme l'indique la figure 40*a*, sur un parallélipipède rectangle élémentaire *abcd*. Les contraintes σ_x et σ_y ne sont pas principales, puisque non seulement des contraintes normales mais aussi des contraintes de cisaillement s'exercent sur les plans perpendiculaires aux axes x et y. Dans ce cas pour construire le cercle des contraintes on utilise d'abord les composantes σ_x, σ_y et τ de la contrainte et l'on trace les points D et D_1 de la façon indiquée sur la figure 40*b*. Puisque ces deux points représentent les contraintes développées sur deux

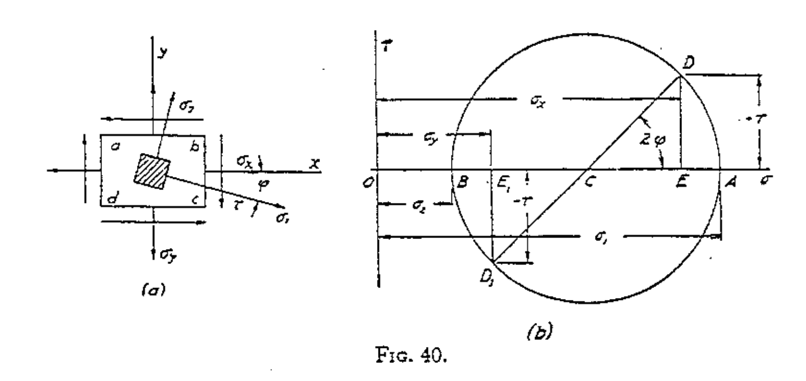


Fig. 40.

plans perpendiculaires, la longueur DD_1 représente un diamètre du cercle des contraintes. L'intersection de ce diamètre avec l'axe des x donne le centre C du cercle, dont le tracé est alors immédiat. Les points A et B du cercle, situés sur l'axe x, définissent les valeurs des contraintes normales maximum et minimum qui sont les contraintes principales et que

l'on désigne par σ_1 et σ_2. A l'aide de ce cercle on obtient facilement les expressions de σ_1 et σ_2. D'après la figure, nous avons :

$$\sigma_1 = \overline{OA} = \overline{OC}+\overline{CD} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau^2}\,, \tag{31}$$

$$\sigma_2 = \overline{OB} = \overline{OC}-\overline{CD} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau^2}\,. \tag{32}$$

La figure permet également de déterminer les directions des contraintes principales. Nous savons que l'angle DCA est le double de l'angle que fait la contrainte σ_1 avec l'axe x et puisque 2φ est compté de D vers A, dans le sens des aiguilles d'une montre, la direction de σ_1 est celle indiquée sur la figure 40*a*. Si l'on isole l'élément hachuré de la figure dont les côtés sont perpendiculaires et parallèles à σ_1, il ne s'exercera sur ceux-ci que des contraintes normales σ_1 et σ_2. Pour le calcul de la valeur absolue de φ nous avons, d'après la figure,

$$|\operatorname{tg} 2\varphi| = \frac{\overline{DE}}{\overline{CE}}\,.$$

Quant au signe de l'angle φ, il sera négatif dans ce cas puisqu'il est mesuré depuis l'axe x dans le sens des aiguilles d'une montre (fig. 40). Par suite,

$$\operatorname{tg} 2\varphi = -\frac{\overline{DE}}{\overline{CE}} = -\frac{2\tau}{\sigma_x-\sigma_y}\,. \tag{33}$$

La contrainte de cisaillement maximum, représentée par le rayon du cercle des contraintes, s'écrit

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1-\sigma_2}{2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau^2}\,. \tag{34}$$

Les équations (31) à (34) permettent de résoudre totalement le problème de la détermination des contraintes maximums normale et de cisaillement, lorsque sont connues les contraintes normale et de cisaillement agissant sur deux plans perpendiculaires quelconques.

Problèmes

1. Un élément, figure 40*a*, est soumis à l'action des contraintes $\sigma_x = 351{,}5$ bars, $\sigma_y = 211$ bars, $\tau = 70{,}25$ bars. Déterminer la grandeur et le sens des contraintes principales σ_1 et σ_2.

Solution. A l'aide des formules (31) et (32) on obtient :

$$\sigma_1 = \frac{351{,}5+211}{2} + \sqrt{\left(\frac{351{,}5-211}{2}\right)^2 + 70{,}3^2}$$
$$= 281{,}25+99{,}38 = 380{,}63 \text{ bars},$$
$$\sigma_2 = 281{,}25-99{,}38 = 181{,}87 \text{ bars}.$$

L'expression (33) nous donne :

$$\operatorname{tg} 2\varphi = -1, \quad 2\varphi = -45°, \quad \varphi = -22°30'.$$

Le signe moins indique que φ est mesuré dans le sens des aiguilles d'une montre à partir de l'axe x.

2. Déterminer la direction des contraintes principales du problème précédent sachant que $\sigma_x = -351{,}5$ bars.

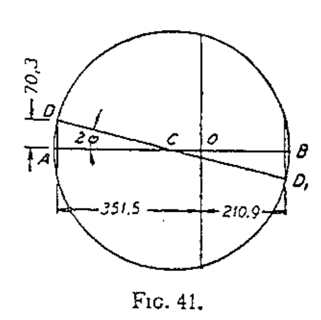


Fig. 41.

Solution. Le cercle des contraintes correspondant est représenté sur la figure 41, $\operatorname{tg} 2\varphi = 1/4$, $2\varphi = 14°2'$. Par suite l'angle entre la compression maximum et l'axe des x est égal à $7°1'$ et il se compte à partir de l'axe Ox en sens inverse des aiguilles d'une montre.

3. Déterminer le cercle des contraintes dans le cas de deux tractions égales $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$ et dans le cas de deux compressions égales $\sigma_x = \sigma_y = -\sigma$; $\tau = 0$ dans les deux cas.

Réponse. Les cercles se transforment en des points de l'axe horizontal, dont les abscisses sont respectivement σ et $-\sigma$.

4. Sur les côtés de l'élément de la figure 42*a* s'exercent les contraintes $\sigma_x = -35{,}2$ bars, $\sigma_y = 105{,}5$ bars, $\tau = 70{,}3$ bars. Calculer, à l'aide du cercle des contraintes, les valeurs des contraintes normale et de cisaillement sur les plans principaux et sur les plans de contrainte de cisaillement maximum.

Solution. La figure 42*b* représente le cercle des contraintes choisi. Les points D et D_1 représentent les contraintes agissant sur les côtés de l'élément (fig. 42*a*) perpendiculaires aux axes x et y. Les contraintes principales sont $\overline{OA}$ et $\overline{OB}$. Leur valeurs sont $\sigma_1 = 134{,}3$ bars et $\sigma_2 = -64$ bars. La direction de compression maximum σ_2 fait un angle de $22°30'$ avec l'axe x, celui-ci étant mesuré à partir de l'axe x dans le sens des aiguilles d'une montre (voir fig. 42*a*). Les points F et F_1 représentent les contraintes s'exerçant sur les plans soumis au cisaillement maximum. La valeur de ce cisaillement est 99,1 bars. Les contraintes normales $\overline{OC}$, agissant dans le même plan, valent 35,2 bars.

5. Résoudre le problème précédent sachant que $\sigma_x = -351$ bars, $\sigma_y = 210$ bars et $\tau = 700$ bars.

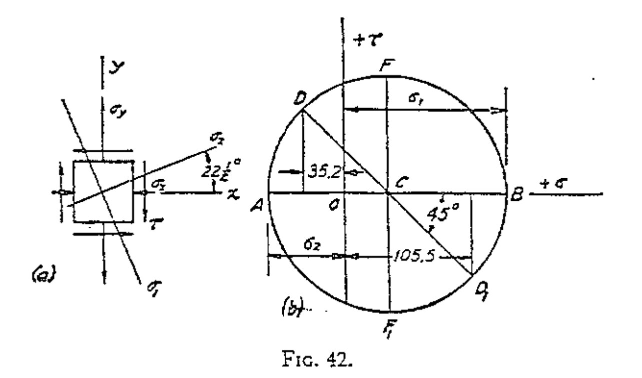


Fig. 42.

14. Contraction transversale

Nous avons étudié (voir § 2) l'allongement axial d'une barre en traction. L'expérience montre qu'un tel allongement est toujours accompagné d'une contraction transversale de la barre, et, en deçà de la limite élastique le rapport

$$\frac{\text{contraction transversale unitaire}}{\text{allongement axial unitaire}}$$

reste constant pour un matériau donné. Cette constante, désignée par μ, est connue sous le nom de *coefficient de Poisson*, du nom du mathématicien français qui en détermina analytiquement la valeur à partir de la théorie moléculaire de la constitution de la matière. Pour les matériaux ayant les mêmes propriétés élastiques dans toutes les directions, et de ce fait appelés *matériaux isotropes*, Poisson obtint $\mu = \frac{1}{4}$. Les recherches expérimentales sur la contraction transversale des métaux de construction ([8]) montrent que μ est généralement proche de la valeur trouvée par Poisson. Par exemple, dans le cas de l'acier de construction, on peut prendre $\mu = 0{,}30$. Connaissant le coefficient de Poisson d'un matériau, on peut calculer la variation de volume d'une barre du matériau en traction. La longueur de la barre augmente dans le rapport $(1+\varepsilon) : 1$. Les dimensions transversales diminuent dans le rapport $(1-\mu\varepsilon) : 1$. Par suite la section transversale décroît dans le rapport $(1-\mu\varepsilon)^2 : 1$. Le volume de la

([8]) Ces matériaux peuvent être considérés comme isotropes (voir 2e partie).

barre varie donc dans le rapport $(1+\varepsilon)(1-\mu\varepsilon)^2 : 1$ ou $(1+\varepsilon-2\mu\varepsilon) : 1$ du fait que ε est un infiniment petit dont on néglige les puissances. Finalement la *dilatation cubique* est $\varepsilon(1-2\mu)$. Comme il est improbable qu'un matériau quelconque, soumis à une traction, diminue de volume, on prendra donc μ inférieur à 0,50. Pour des matériaux tels que le caoutchouc et la paraffine, μ tend vers 0,5 et le volume de ces matériaux reste approximativement constant pendant l'allongement. Pour des matériaux comme le béton, μ est très faible ($\mu = \frac{1}{8}$ à $\frac{1}{12}$) et pour le liège, μ est pratiquement nul.

Le développement ci-dessus, concernant la contraction transversale en traction, peut être repris en compression, moyennant quelques modifications convenables. La compression longitudinale est accompagnée d'une dilatation transversale et l'on utilise la même valeur de μ, employée dans le cas de l'allongement, pour le calcul de cette dilatation.

Problèmes

1. Calculer la dilatation cubique d'une barre en traction sachant que $\sigma_W = 351$ bars, $\mu = 0{,}30$ et $E = 21\times10^5$ bars.

Solution. La dilatation cubique est

$$\varepsilon(1-2\mu) = \frac{\sigma_W}{E}(1-2\mu) = \frac{351}{21\times10^5}(1-0{,}6) = 6{,}7\times10^{-5}.$$

2. Déterminer l'accroissement de volume d'une barre sous l'effet d'un effort P, appliqué à une extrémité, et de son propre poids (voir § 5).

Réponse. L'augmentation de volume est égale à

$$\frac{Al(1-2\mu)}{E}\left(\frac{P}{A}+\frac{\gamma l}{2}\right).$$

3. Une barre d'acier circulaire est soumise à un effort axial P tel que le diamètre initial, 12,7 cm, de la barre diminue de 0,025 mm. Trouver P.

Réponse. $P = 178{,}4$ kN.

4. La barre circulaire en acier du problème précédent est tendue par une force $P = 45{,}359$ kN. Calculer la diminution d'aire de la section transversale.

Réponse. 1,3 mm.

15. Déformation dans le cas de traction ou compression suivant deux directions perpendiculaires

Lorsqu'une barre en forme de parallélépipède rectangle est soumise à des efforts de traction agissant suivant deux directions perpendiculaires x, y (fig. 37), l'allongement dans l'une de ces directions dépend non seulement de la contrainte de traction dans cette direction mais aussi de la contrainte qui lui est perpendiculaire. L'allongement unitaire suivant l'axe x, dû à la traction σ_x, est égal à σ_x/E. La contrainte de traction σ_y produit une contraction transversale, suivant x, égale à $\mu\sigma_y/E$. Par suite, si les deux contraintes σ_x, σ_y agissent simultanément, l'allongement unitaire suivant x est

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \mu\frac{\sigma_y}{E}. \tag{35}$$

De même, l'allongement suivant y est

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \mu\frac{\sigma_x}{E}. \tag{36}$$

La contraction du parallélépipède suivant z est

$$\varepsilon_z = -\mu\frac{\sigma_x}{E} - \mu\frac{\sigma_y}{E} = -\frac{\mu}{E}(\sigma_x+\sigma_y).$$

Dans le cas particulier où les deux tractions sont égales, $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$, on obtient

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \frac{\sigma}{E}(1-\mu). \tag{37}$$

D'après les équations (35) et (36) les contraintes σ_x et σ_y s'obtiennent en fonction des déformations unitaires ε_x et ε_y :

$$\sigma_x = \frac{(\varepsilon_x+\mu\varepsilon_y)E}{1-\mu^2}, \qquad \sigma_y = \frac{(\varepsilon_y+\mu\varepsilon_x)E}{1-\mu^2}. \tag{38}$$

Si, dans le cas de la figure 37*a*, les allongements ε_x suivant l'axe et ε_y suivant la circonférence sont mesurés à l'aide d'un extensomètre, les tractions correspondantes σ_x et σ_y sont alors extraites des équations (38).

Problèmes

1. Déterminer l'augmentation de volume de la chaudière cylindrique en acier sous l'action de la pression interne (fig. 37). On néglige la déformation des extrémités et l'on prend $\sigma_y = 420$ bars.

Solution. D'après les équations (35) et (36) :

$$\varepsilon_x = \frac{210}{21 \times 10^5} - 0{,}3 \frac{420}{21 \times 10^5} = \frac{84}{21 \times 10^5} = 4 \times 10^{-5},$$

$$\varepsilon_y = \frac{420}{21 \times 10^5} - 0{,}3 \frac{210}{21 \times 10^5} = \frac{357}{21 \times 10^5} = 17 \times 10^{-5}.$$

Le volume de la chaudière augmente dans le rapport

$$(1+\varepsilon_x)(1+\varepsilon_y)^2 : 1 = (1+\varepsilon_x+2\,\varepsilon_y) : 1 = 1{,}000\,38 : 1 .$$

2. Un cube de béton est comprimé suivant deux directions perpendiculaires de la manière indiquée sur la figure 43. Déterminer la diminution de volume du cube sachant que son arête mesure 10 cm, la contrainte de compression est uniformément répartie sur toutes les faces, $\mu = 0{,}1$ et $P = 10$ kN.

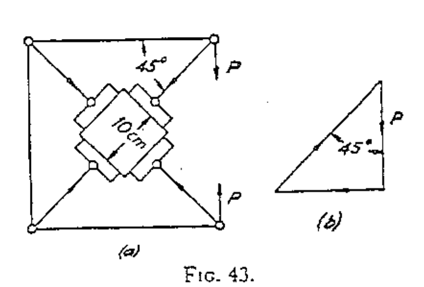


Fig. 43.

Solution. Négligeant les frottements aux articulations et considérant chacun d'eux à l'équilibre (fig. 43*b*), l'on démontre que le cube est soumis à des compressions égales suivant deux directions perpendiculaires et que la compression est égale à $P\sqrt{2} = 14{,}140$ kN.

La déformation correspondante, d'après (37), est

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = -\frac{14\,140}{100 \times 28 \times 10^4}(1-0{,}1) = -0{,}000\,454 .$$

Dans la direction perpendiculaire au plan de la figure le cube se dilate transversalement d'une quantité

$$\varepsilon_z = -\mu \frac{\sigma_x}{E} - \mu \frac{\sigma_y}{E} = 0{,}2 \frac{14\,140}{100 \times 28 \times 10^4} = 0{,}000\,101 .$$

La diminution par unité de volume du cube est alors

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = -\,2 \times 0{,}000\,454 + 0{,}000\,101 = -\,0{,}000\,807.$$

3. Déterminer l'accroissement de la surface latérale cylindrique de la chaudière considérée dans le problème 1, ci-dessus.

Solution. L'accroissement par unité d'aire de surface latérale est $\varepsilon_x + \varepsilon_y = 21 \times 10^{-5}$.

4. Déterminer l'allongement unitaire suivant la direction σ_1 d'une barre d'acier, sachant que les conditions de contraintes sont identiques à celles du problème 1, page 49.

Solution.

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{21 \times 10^5}(380{,}63 - 0{,}3 \times 181{,}87) = 155 \times 10^{-6}.$$

5. Une barre soumise à une contrainte de traction $\sigma_x = 2\,100$ bars, suivant son axe, subit un allongement unitaire $\varepsilon_x = 0{,}001$ et le rapport de sa dilatation cubique à la variation unitaire de sa section est $\frac{3}{4}$. Calculer E et μ.

Réponse. $E = 21 \times 10^5$ bars, $\mu = \frac{2}{7}$.

6. Un parallélépipède rectangle est soumis à la traction suivant deux directions perpendiculaires (voir fig. 44). Calculer l'allongement unitaire ε suivant $\overline{OC}$.

Solution. Les coordonnées du point C après déformation sont $a(1+\varepsilon_x)$ et $b(1+\varepsilon_y)$, et la longueur $\overline{OC}$ après déformation est

$$\sqrt{a^2(1+2\,\varepsilon_x)+b^2(1+2\,\varepsilon_y)} \approx \sqrt{a^2+b^2}\left(1+\frac{a^2\varepsilon_x}{a^2+b^2}+\frac{b^2\varepsilon_y}{a^2+b^2}\right).$$

Soustrayons la longueur initiale $\sqrt{a^2+b^2}$ et divisons par cette même longueur initiale, il vient

$$\varepsilon = \varepsilon_x \cos^2\alpha + \varepsilon_y \sin^2\alpha . \quad (^9)$$

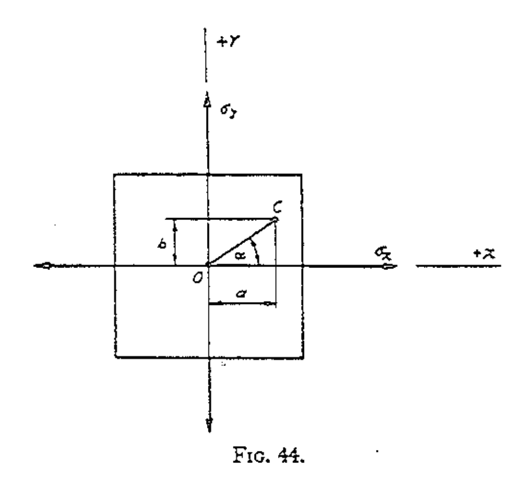


Fig. 44.

(9) Cette équation est semblable à (26). On peut donc réaliser une représentation graphique des déformations (cercle des déformations) identique au cercle des contraintes de Mohr.

16. Cisaillement pur

Module de cisaillement. Considérons le cas particulier des contraintes normales s'exerçant suivant deux directions perpendiculaires de manière que la contrainte de traction σ_x, suivant la direction horizontale, soit numériquement égale à la compression σ_y suivant la direction verticale (fig. 45*a*). La figure 45*b* représente le cercle des contraintes correspondant. Le point D de ce cercle désigne les contraintes agissant sur les plans ab et cd, perpendiculaires au plan xy, et inclinés de 45° par rapport à l'axe x. Le point D_1 représente les contraintes agissant sur les plans ad et bc respectivement perpendiculaires à ab et cd. On constate, d'après le cercle des contraintes, que la contrainte normale sur chacun de ces plans est nulle et que la contrainte de cisaillement sur ces mêmes plans, représentée par le rayon du cercle, est numériquement égale à la contrainte normale σ_x, d'où

$$\tau = \sigma_x = -\sigma_y . \qquad (a)$$

Considérons un élément $abcd$, il est en équilibre sous la seule action des contraintes de cisaillement (voir fig. 45*a*). Cet état de contrainte est appelé

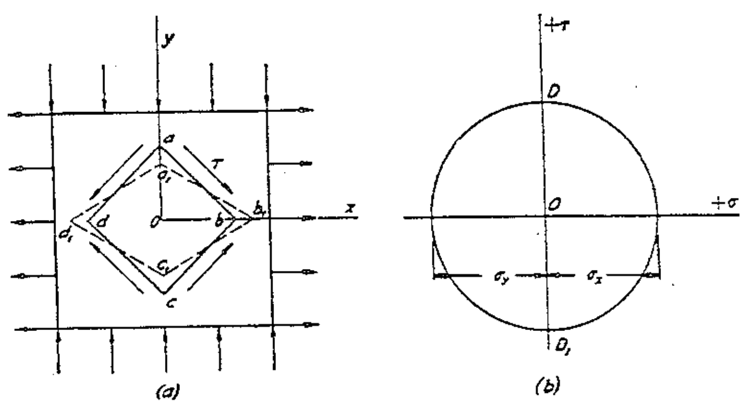


Fig. 45.

cisaillement pur. L'on conclut que le cisaillement pur est équivalent à l'état de contrainte produit par une traction suivant une direction et une compression égale dans la direction perpendiculaire. Si l'on isole un élément carré, semblable à l'élément $abcd$ de la figure 45*a*, par des plans

qui ne sont plus inclinés de 45° sur l'axe x, les contraintes normale et de cisaillement s'exerceront sur les côtés de cet élément. La grandeur de ces contraintes est mesurée de la manière la plus classique sur le cercle des contraintes de la figure 45*b*.

Considérons alors la déformation d'un élément $abcd$. Puisque les contraintes normales ne se développent pas sur ses côtés, ceux-ci ne subiront pas de déformation, par contre la diagonale horizontale bd s'allongera alors que la diagonale ac raccourcira. Le carré $abcd$ se transforme ainsi en un losange représenté par les traits en pointillé sur la figure. L'angle en b, égal à $\pi/2$ avant déformation, diminue d'une quantité γ pendant que l'angle en a augmente et devient égal à $(\pi/2)+\gamma$. Le petit angle γ détermine la distorsion de l'élément $abcd$ et s'appelle *déformation de cisaillement*.

La déformation de cisaillement se représente figurativement de la manière suivante : l'élément $abcd$ de la figure 45*a* tourne en sens inverse des aiguilles d'une montre de 45° et vient prendre la position indiquée sur la figure 46. Après la distorsion créée par les contraintes de cisaillement τ, l'élément devient le losange tracé en pointillé. La déformation de cisaillement représentée par la valeur du petit angle γ, est assimilée au rapport $\overline{aa_1}/\overline{ad}$, égal au glissement horizontal aa_1 du côté ab, par rapport à dc, divisé par la distance entre les deux côtés. Si le matériau obéit à la loi de Hooke, ce glissement est proportionnel à la contrainte τ et l'on exprime la relation entre contrainte de cisaillement et déformation de cisaillement par l'équation :

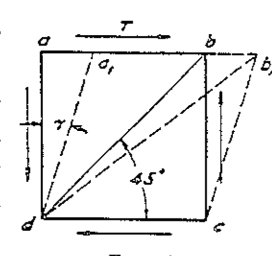


Fig. 46.

$$\gamma = \frac{\tau}{G}, \qquad (39)$$

où G est une constante dépendant des propriétés mécaniques du matériau. L'équation (39) est analogue à l'équation (4) établie pour la traction simple, et la constante G est appelée *module d'élasticité de cisaillement* ou *module de rigidité*.

Puisque la distorsion de l'élément $abcd$ (fig. 46) est entièrement définie par l'allongement de la diagonale bd et le raccourcissement de ac, et puisque ces déformations se calculent au moyen des équations du paragraphe précédent, l'on conclut que le module G s'exprime en fonction du module de traction E et du coefficient de Poisson μ. Considérons, pour

établir cette relation, le triangle Oab (fig. 45a). L'allongement du côté Ob et le raccourcissement de Oa, pendant la déformation, s'obtiennent à l'aide des équations (35) et (36). Nous avons, en fonction de ε_x et ε_y,

$$Ob_1 = Ob\,(1+\varepsilon_x)\,, \qquad Oa_1 = Oa\,(1+\varepsilon_y)\,,$$

et, à partir du triangle Oa_1b_1,

$$\mathrm{tg}\,(Ob_1a_1) = \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{Oa_1}{Ob_1} = \frac{1+\varepsilon_y}{1+\varepsilon_x}\,. \qquad (b)$$

Puisque l'angle γ est petit, nous pouvons écrire aussi

$$\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\mathrm{tg}\frac{\pi}{4} - \mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}}{1+\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}} + \frac{1-\frac{\gamma}{2}}{1 \approx \frac{\gamma}{2}}\,. \qquad (c)$$

Remarquant que dans le cas du cisaillement pur

$$\sigma_x = -\sigma_y = \tau\,,$$

$$\varepsilon_x = -\varepsilon_y = \frac{\sigma_x\,(1+\mu)}{E} = \frac{\tau\,(1+\mu)}{E}\,,$$

et égalant les expressions (a) et (b), on obtient

$$\frac{1 - \frac{\tau\,(1+\mu)}{E}}{1 + \frac{\tau\,(1+\mu)}{E}} = \frac{1-\frac{\gamma}{2}}{1+\frac{\gamma}{2}}\,,$$

d'où

$$\frac{\gamma}{2} = \frac{\tau\,(1+\mu)}{E}$$

ou

$$\gamma = \frac{2\,\tau\,(1+\mu)}{E}\,.$$

Comparons ce résultat à la formule (39), on conclut que

$$G = \frac{E}{2\,(1+\mu)}\,. \qquad (40)$$

Le module d'élasticité de cisaillement se déduit donc facilement du module d'élasticité de traction E et du coefficient de Poisson μ. Dans le cas de l'acier, par exemple,

$$G = \frac{21 \times 10^5}{2\,(1+0{,}3)} = 8 \times 10^4 \text{ bars}\,.$$

On notera que l'application d'un cisaillement uniforme sur les faces d'un cube, comme dans le cas de la figure 46, est difficilement réalisable. Aussi réalise-t-on généralement la condition de cisaillement pur en soumettant à la torsion un tube circulaire (voir fig. 47). Etant donné la faible rotation relative des extrémités du tube, les génératrices tracées sur la surface cylindrique deviennent obliques par rapport à l'axe du cylindre et un élément $abcd$, formé par deux génératrices et par deux sections circulaires infiniment voisines, subit une déformation de cisaillement identique à celle de la figure 46.

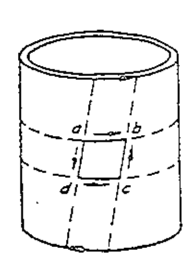


Fig. 47.

On étudiera ultérieurement le cas de la torsion (voir chap. 10), nous montrerons comment calculer la contrainte de cisaillement τ et la déviation γ d'un élément $abcd$, à partir du couple et de l'angle de torsion correspondant d'un cylindre. Après avoir déterminé τ et γ par un essai de torsion, on obtient G à l'aide de l'équation (39). Connaissant G, E étant déterminé par un essai de traction, l'on calcule le coefficient de Poisson μ par l'équation (40). La détermination directe de μ par la mesure de la contraction transversale, lors d'un essai de traction, est très compliquée. En effet, cette contraction est très faible et sa mesure précise nécessite l'emploi d'instruments extrêmement sensibles.

Problèmes

1. Le cube $abcd$ (fig. 46) est constitué par un matériau pour lequel $E = 7 \times 10^5$ bars et $\mu = 0{,}25$. Déterminer γ et l'allongement unitaire de la diagonale bd sachant que $\tau = 700$ bars.

Réponse. $\gamma = 0{,}002\,5$, $\varepsilon = 0{,}001\,25$.

2. Calculer, dans le problème précédent, le glissement aa_1 du côté ab par rapport à cd, sachant que $bd = 5$ cm.

Réponse. $aa_1 = \gamma\sqrt{5}$.

3. Démontrer que la variation de volume du cube $abcd$ (fig. 46) est nulle si l'on ne tient compte que des premières puissances des composantes de la déformation ε_x et ε_y.

4. Démontrer que dans le cas du cisaillement pur (fig. 46) l'allongement unitaire de la diagonale bd est égal à la moitié de la déformation de cisaillement γ.

5. Déterminer l'allongement unitaire des côtés de l'élément *abcd* de la figure 45*a*, lorsqu'on prend en considération les infiniment petits du second ordre.

Solution. Soit l la longueur initiale des côtés de l'élément *abcd*, après déformation

$$Oa_1 = \frac{l}{\sqrt{2}}(1-\varepsilon_z) \quad \text{et} \quad Ob_1 = \frac{l}{\sqrt{2}}(1+\varepsilon_z).$$

Par suite

$$a_1 b_1 = \frac{l}{\sqrt{2}}\sqrt{(1-\varepsilon_z)^2+(1+\varepsilon_z)^2} = l\sqrt{1+\varepsilon_z^2} \approx l(1+\tfrac{1}{2}\varepsilon_z^2).$$

L'allongement unitaire des côtés de l'élément *abcd* est $\frac{1}{2}\varepsilon_z^2$.

17. Contrainte d'utilisation de cisaillement

On peut établir expérimentalement la relation liant la contrainte et la déformation de cisaillement en soumettant un matériau au cisaillement pur (voir fig. 47). Cette relation est habituellement représentée par un diagramme (fig. 48) dont les abscisses représentent la déformation de cisaillement et les ordonnées la contrainte de cisaillement. Ce diagramme est analogue à celui obtenu pour l'essai de traction et l'on retrouve la limite de proportionnalité A et la limite d'allongement B.

Fig. 48.

L'expérience montre que pour un matériau de construction comme l'acier de construction, la limite d'allongement au cisaillement $\tau_{Y.P.}$ vaut environ 0,55 à 0,60 $\sigma_{Y.P.}$. Puisque à la limite d'allongement correspond une distorsion importante sans variation appréciable de la contrainte, il est donc logique de ne prendre, pour contrainte d'utilisation de cisaillement, qu'une fraction de la contrainte de limite d'allongement, d'où

$$\tau_W = \frac{\tau_{Y.P.}}{n}, \tag{41}$$

n représente un coefficient de sécurité. Prenons pour n la même valeur en traction ou en compression, nous obtenons

$$\tau_W = 0{,}55 \text{ à } 0{,}60 \text{ de } \sigma_W.$$

L'on remarque qu'en cisaillement, la contrainte d'utilisation doit être très inférieure à celle utilisée en traction.

Nous avons déjà signalé que dans les applications pratiques, la distribution uniforme de la contrainte de cisaillement sur les faces d'un cube est difficilement réalisable, et que le cisaillement pur s'obtient dans le cas de la torsion. Nous verrons ultérieurement que cet état existe dans le cas de la flexion des poutres. On résout plusieurs problèmes pratiques en supposant que nous avons affaire au cisaillement pur, même si cette hypothèse ne représente qu'une approximation grossière. Prenons, par exemple, le cas du joint de la figure 49. Il est évident que si le diamètre du

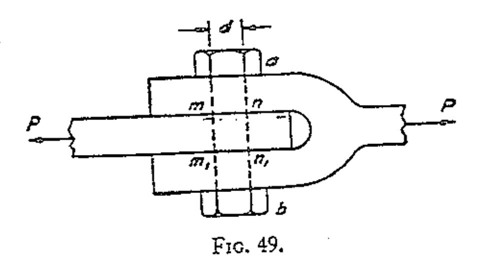


Fig. 49.

boulon ab n'est pas suffisamment large, la rupture du joint se produira par cisaillement le long des sections mn et m_1n_1. Une étude plus rigoureuse du problème montre que les contraintes de cisaillement ne sont pas réparties uniformément sur ces sections et que le boulon subit non seulement un cisaillement mais aussi une flexion due aux efforts de traction P. On obtient toutefois une approximation grossière du diamètre nécessaire du boulon en supposant que le long des plans mn et m_1n_1 la contrainte de cisaillement τ est uniformément répartie. Cette contrainte s'obtient en divisant P par la somme des aires des sections droites mn, m_1n_1. Par suite

$$\tau = \frac{2P}{\pi d^2},$$

et le diamètre nécessaire du boulon s'obtient par l'équation

$$\tau_W = \frac{2P}{\pi d^2}. \tag{42}$$

On trouve un autre exemple de résolution simplifiée des problèmes de cisaillement dans le cas des joints rivetés de la figure 50. Puisque les têtes des rivets sont formées à haute température, le refroidissement de ceux-ci provoque une importante compression des tôles [10]. La pression

[10] L'expérience montre que la contrainte de traction dans les rivets est généralement voisine de la limite d'allongement du matériau constituant les rivets. Voir C. Bach, *Z. Ver. deut. Ing.*, 1912.

entre les tôles donne lieu à des frottements qui empêchent tout mouvement relatif de ces tôles lorsque sont appliqués les efforts de traction P. Ce n'est que lorsque ceux-ci ont vaincu les frottements que les rivets travaillent au cisaillement et si leur diamètre est insuffisant la rupture se produit par cisaillement le long des plans mn et m_1n_1. Il apparaît que l'étude des contraintes d'un joint riveté est assez ardue. On obtient généralement une solution approchée du problème en négligeant les frottements et en supposant que les contraintes de cisaillement sont uniformément réparties le long des sections mn et m_1n_1. Par suite, le diamètre utile des rivets s'obtient à l'aide de l'équation (42), comme dans l'exemple précédent

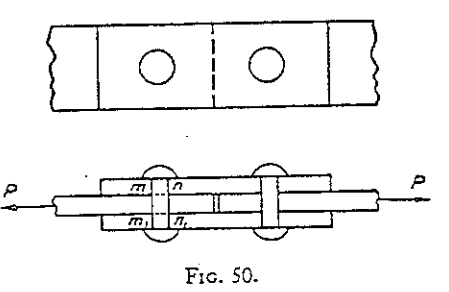


FIG. 50.

Problèmes

1. Déterminer le diamètre du boulon du joint de la figure 49, sachant que $P = 4\ 536$ daN et $\tau_{tr} = 422$ bars.

Réponse. $d = 2{,}62$ cm.

2. Calculer la longueur de sécurité $2l$ du joint d'assemblage de deux barres rectangulaires en bois (fig. 51), soumises à une traction $P = 4\ 536$ daN. On prendra $\tau_{tr} = 7$ bars pour le cisaillement parallèle aux fibres et $b = 25{,}4$ cm. Déterminer l'épaisseur nécessaire mn_1, sachant que la limite de sécurité de la compression totale, suivant les fibres de bois, est de 56 bars.

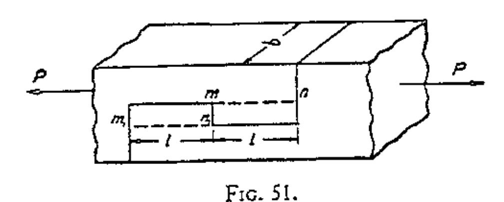


FIG. 51.

Réponse. $2l = 50{,}8$ cm, $mn_1 = 3{,}18$ cm.

3. Déterminer le diamètre des rivets de la figure 50, pour $\tau_{tr} = 562{,}5$ bars et $P = 3\ 629$ daN.

Réponse. $d = 2{,}0$ cm.

4. Déterminer les dimensions l et δ des flasques d'assemblages (fig. 52) de deux poutres à section rectangulaire, les efforts, les dimensions et les contraintes d'utilisation étant les mêmes que dans le problème 2.

Réponse. $l = 12{,}7$ cm, $\delta = 1{,}6$ cm.

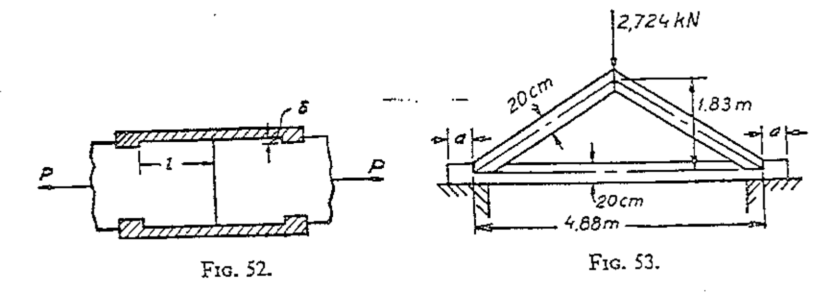


FIG. 52. FIG. 53.

5. Déterminer la distance a requise pour la ferme de la figure 53, sachant que la contrainte de cisaillement admissible est la même que dans le problème 2, et les dimensions des sections transversales de toutes les poutres sont identiques et égales à 10 cm × 20 cm. On néglige les frottements.

Réponse. $a = 25{,}4$ cm.

18. Traction ou compression suivant trois directions perpendiculaires

Considérons une barre de fer, en forme de parallélépipède rectangle, soumise à l'action d'efforts uniformément répartis P_x, P_y, P_z (fig. 54) ; les contraintes normales sur les sections respectivement perpendiculaires aux axes x, y et z sont :

$$\sigma_x = \frac{P_x}{A_x}, \qquad \sigma_y = \frac{P_y}{A_y}, \qquad \sigma_z = \frac{P_z}{A_z}.$$

FIG. 54.

Nous supposerons que $\sigma_x > \sigma_y > \sigma_z$.

Combinons les effets des forces P_x, P_y et P_z, l'on conclut que sur une section z, seules les forces P_x et P_y créent des contraintes que l'on calcule à l'aide des équations (26), (27) et que l'on représente graphiquement

par le cercle de Mohr. Sur la figure 55, le cercle des contraintes de diamètre AB représente ces contraintes. De la même manière, les contraintes d'une section quelconque passant par l'axe x sont représentées par le cercle de diamètre BC. Enfin, le cercle de diamètre AC figure les contraintes sur une section passant par l'axe des y. Les trois cercles de Mohr représentent donc les contraintes agissant sur trois séries de sections contenant les axes x, y, z. Pour une section inclinée sur l'axe des x, des y et des z, les composantes de la contrainte sont définies par les coordonnées d'un point localisé à l'intérieur de l'aire hachurée de la figure 55 (11). On en conclut que la contrainte de cisaillement maximum est représentée par le rayon du plus grand des trois cercles et s'obtient par l'équation $\tau_{max}=(\sigma_x-\sigma_y)/2$. Elle s'exerce sur la section contenant l'axe des y, laquelle est bissectrice de l'angle formé par les axes x et z.

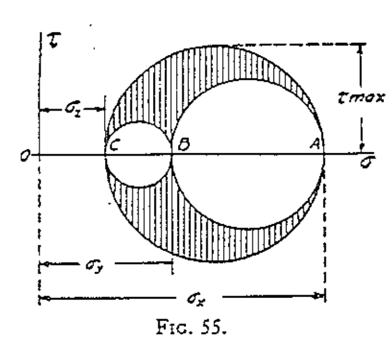


FIG. 55.

On obtient les équations des allongements unitaires suivant les axes des x, y, z en combinant les effets de P_x, P_y, P_z, ceci de la même façon que dans le cas de la traction ou compression suivant deux directions perpendiculaires (voir § 15). On obtient ainsi :

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\mu}{E}(\sigma_y+\sigma_z),$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\mu}{E}(\sigma_x+\sigma_z), \qquad (43)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\mu}{E}(\sigma_x+\sigma_y).$$

Le volume de la barre augmente dans le rapport

$$(1+\varepsilon_x)(1+\varepsilon_y)(1+\varepsilon_z):1,$$

ou, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur,

$$(1+\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z):1.$$

(11) On trouvera la démonstration de ce théorème dans l'ouvrage de A. FÖPPL, *Technische Mechanik*, vol. 5, p. 18, 1918. Voir aussi H. M. WESTERGAARD, *Z. angew. Math. u. Mech.*, vol. 4, p. 520, 1924.

La dilatation cubique est donc

$$\Delta = \varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z. \qquad (44)$$

On obtient la relation entre la dilatation cubique et les contraintes agissant sur les faces de la barre en additionnant membre à membre les équations (43). Il vient

$$\Delta = \varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z = \frac{(1-2\mu)}{E}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z). \qquad (45)$$

Dans le cas particulier d'une pression hydrostatique uniforme, nous avons

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p.$$

Par suite, d'après les équations (43),

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\frac{p}{E}(1-2\mu), \qquad (46)$$

et par les équations (45),

$$\Delta = -\frac{3(1-2\mu)}{E}p, \qquad (47)$$

ou, en utilisant la notation

$$\frac{E}{3(1-2\mu)} = K, \qquad (48)$$

on obtient

$$\Delta = -\frac{p}{K}. \qquad (49)$$

La contraction de l'unité de volume est proportionnelle à la compression p et inversement proportionnelle au facteur K, appelé *module d'élasticité cubique*.

Problèmes

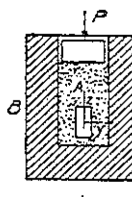
1. Déterminer la diminution de volume d'une sphère pleine en acier de 25 cm de diamètre, soumise à une pression hydrostatique uniforme $p = 700$ bars.

Solution. D'après (49),

$$\Delta = -\frac{p}{K} = -\frac{700\times 3(1-2\times 0{,}3)}{21\times 10^5} = -\frac{4}{10^4}$$

La diminution de volume est donc

$$\frac{4}{10^4} \times \frac{\pi d^3}{6} = 3{,}272 \text{ cm}^3$$



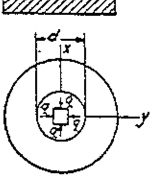


FIG. 56.

2. Un cylindre en caoutchouc *A est comprimé dans* un cylindre en acier *B* par une force *P* (voir fig. 56). Déterminer la pression entre le caoutchouc et l'acier, pour $P = 500$ daN, $d = 5$ cm, le coefficient de Poisson pour le caoutchouc est $\mu = 0{,}45$. On néglige le frottement entre le caoutchouc et l'acier.

Solution. Soit *p* les contraintes de compression qui s'exercent sur une section transversale perpendiculaire à l'axe du cylindre et *q* la pression entre le caoutchouc et la surface intérieure du cylindre d'acier. Une compression ayant même valeur s'exerce entre les surfaces latérales des fibres longitudinales du cylindre en caoutchouc. Considérons, dans celui-ci, un élément en forme de parallélépipède rectangle dont les faces sont parallèles à l'axe du cylindre (voir fig. 56). Cet élément est en équilibre sous l'action des contraintes de compression *q*, agissant sur ses faces, et la compression axiale *p*. Supposons que le cylindre en acier soit absolument rigide, la dilatation transversale du caoutchouc suivant les directions *x* et *y* est nulle et les équations (43) nous donnent

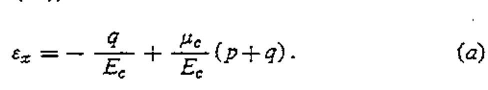
$$0 = \frac{q}{E} - \frac{\mu}{E}(p+q)\,.$$

d'où l'on tire

$$q = \frac{\mu p}{1-\mu} = \frac{0{,}45}{1-0{,}45}\cdot\frac{500\times 4}{\pi\times 25} = 20{,}84 \text{ bars}\,.$$

3. Un poteau en béton est coulé dans un tube d'acier (fig. 57). Déterminer la pression entre le béton et l'acier, et la contrainte de traction suivant le contour du tube. On suppose qu'il n'y a pas de frottement entre béton et acier, et que toutes les dimensions ainsi que la compression longitudinale soient connues.

Solution. Soit *p* et *q* les contraintes de compression longitudinale et transversale, *d* et *h* le diamètre intérieur et l'épaisseur du tube, E_s le module d'élasticité de l'acier, E_c et μ_c le module d'élasticité et le coefficient de Poisson du béton. La dilatation du béton suivant la direction transversale est, d'après (43),



$$\varepsilon_x = -\frac{q}{E_c} + \frac{\mu_c}{E_c}(p+q)\,. \qquad (a)$$

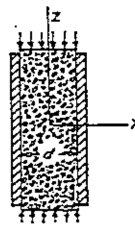


FIG. 57.

Cette dilatation est égale à celle du contour du tube (voir éq. 13, p. 31),

$$\varepsilon_x = \frac{qd}{2hE_s}\,. \qquad (b)$$

d'où

$$\frac{qd}{2hE_s} = -\frac{q}{E_c} + \frac{\mu_c}{E_c}(p+q)\,,$$

ce qui donne

$$q = p\,\frac{\mu_c}{\dfrac{d}{2h}\dfrac{E_c}{E_s} + 1 - \mu_c}\,.$$

La contrainte de traction sur le contour du tube est donc

$$\sigma = \frac{qd}{2h}\,.$$

4. Déterminer la contrainte de cisaillement maximum dans le poteau en béton du problème précédent, sachant que $p = 70$ bars, $\mu_c = 0{,}10$ et $d/2h = 7{,}5$.

Solution. $$\tau_{max} = \frac{p-q}{2} = \frac{p}{2}\left(1 - \frac{0{,}1}{0{,}9}\right) = 33{,}2 \text{ bars}\,.$$

5. Une coque sphérique en acier (fig. 58) est sollicitée par une pression uniforme intérieure et extérieure *p*. Déterminer le raccourcissement δ du diamètre intérieur. Construire les cercles de Mohr comme sur la figure 55.

Réponse. $\delta = \dfrac{pd(1-2\mu)}{E}$; dans ce cas les trois cercles se réduisent à un point d'abscisse $\sigma = -p$.

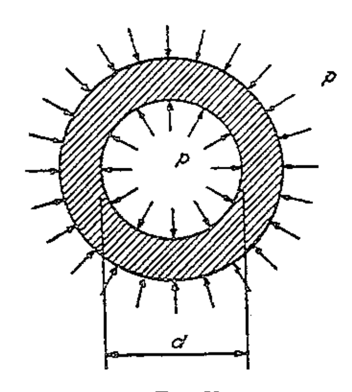


FIG. 58.

3

MOMENT FLÉCHISSANT ET EFFORT TRANCHANT

19. Types de poutres

Le présent chapitre a pour objet l'étude des types de poutres les plus simples, c'est-à-dire ayant un plan de symétrie vertical passant par l'axe longitudinal et dont les appuis se rapportent aux différents cas de la figure 59. On suppose que toutes les forces appliquées sont verticales et s'exercent dans le plan de symétrie si bien que la flexion apparaît dans ce même plan. La figure 59*a* représente une *poutre à extrémités en appui simple*. Les points d'appui A et B sont articulés de façon que les extrémités de la poutre puissent se mouvoir librement pendant la flexion. On suppose aussi qu'un des appuis est monté sur rouleaux et peut ainsi effectuer librement une translation horizontale. La figure 59*b* représente une poutre *cantilever* (ou en *porte-à-faux*). L'extrémité A de cette poutre est scellée dans le mur et ne bouge pas pendant la flexion, tandis que l'extrémité B est entièrement libre. La figure 59*c* représente une poutre en porte-à-faux d'extrémité. Cette poutre est articulée sur un appui fixe en son extrémité A et repose sur un appui mobile en C.

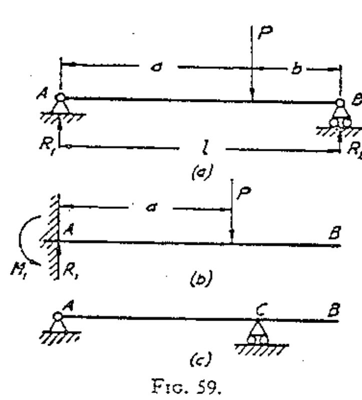


Fig. 59.

Les trois types de poutre précitées entrent dans la catégorie des poutres *statiquement déterminées*, puisque les réactions aux appuis, produites par une charge donnée, se déterminent à l'aide des équations de la statique. Considérons, par exemple, la poutre en appui simple supportant une charge verticale P (fig. 59*a*), on remarque que la réaction R_2 à l'extrémité B est verticale, étant donné que cette extrémité est libre de se mouvoir horizontalement. Par suite, d'après les équations de la statique $\Sigma X = 0$, il en résulte que la réaction R_1 est aussi verticale. Les valeurs R_1 et R_2 se calculent à l'aide des équations des moments. Egalant

à zéro la somme des moments de toutes les forces par rapport au point B, on obtient

$$R_1 l - Pb = 0,$$

d'où

$$R_1 = \frac{Pb}{l}.$$

De même, en considérant les moments par rapport au point A, nous avons

$$R_2 = \frac{Pa}{l}.$$

Les réactions d'une poutre en porte-à-faux d'extrémité (fig. 59*c*) s'obtiennent de la même manière.

Dans le cas d'une poutre cantilever (fig. 59*b*) la charge P est équilibrée par les réactions s'exerçant sur l'extrémité encastrée. A partir des équations $\Sigma X = 0$, $\Sigma Y = 0$ de la statique on conclut immédiatement que la résultante des réactions R_1 est verticale et égale à P. D'après les équations des moments, $\Sigma M = 0$, il en découle que le moment M_1 des réactions par rapport au point A est égal à Pa et agit en sens inverse des aiguilles d'une montre comme l'indique la figure.

Les réactions provoquées par tout autre cas de charge, sur les types de poutres ci-dessus, se calculent par un procédé identique.

On notera que les dispositions spéciales permettant une rotation libre des extrémités et un mouvement libre de l'appui ne sont prises, en pratique, que pour les poutres à grande portée, comme les poutres de pont. Pour les poutres à faible portée les conditions d'appui sont généralement celles illustrées par la figure 60. La flexion de ce type de poutre donne lieu à des forces de frottement entre les surfaces d'appui et la poutre, qui s'opposent au mouvement horizontal des extrémités de la poutre. Ces forces peuvent devenir importantes dans le cas de barres flexibles et de bandes métalliques minces (voir p. 172), mais dans le cas d'une poutre rigide dont la flèche est très petite en comparaison de la portée l, ces forces peuvent être négligées, et l'on calcule les réactions comme s'il s'agissait d'une poutre en appui simple (fig. 59*a*).

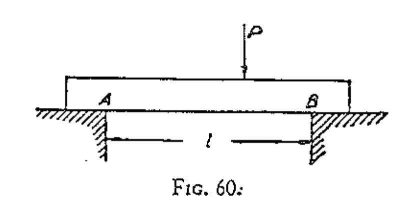


Fig. 60.

20. Moment fléchissant et effort tranchant

Considérons à présent une poutre en appui simple soumise à des efforts verticaux P_1, P_2, P_3 (fig. 61*a*). On suppose que la poutre possède un plan de symétrie axial et que les charges agissent dans ce plan. Par suite, en raison de la symétrie, on conclut que la flexion se produit dans

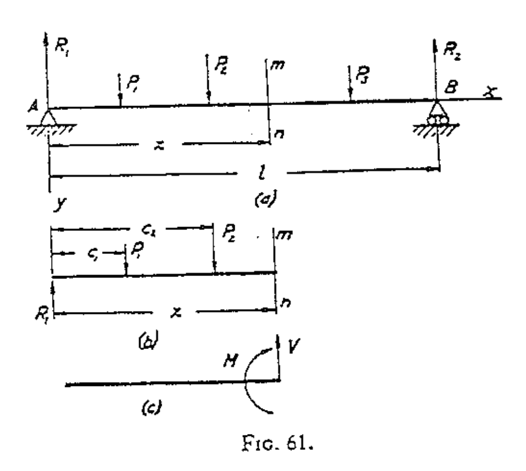


FIG. 61.

ce plan. Dans la plupart des cas pratiques cette condition de symétrie est remplie puisque les formes des sections de poutre, représentées par des cercles, rectangles, profils en I, en T, sont symétriques. On étudiera plus loin le cas le plus général de section transversale non symétrique (voir chap. 8).

Dans l'étude des contraintes développées dans une poutre pendant la flexion, nous opérons de la même façon que pour la recherche des contraintes produites dans une barre par une traction simple (fig. 1). On suppose que la poutre AB est divisée en deux parties par la section droite mn située à une distance quelconque x du support gauche A (fig. 61*a*) et que la partie de la poutre à droite de mn est retirée. Pour étudier l'équilibre du tronçon de gauche de la poutre (fig. 61*b*), on doit tenir compte non seulement des efforts externes tels que les charges P_1, P_2 et la réaction R_1, mais aussi des efforts internes, répartis sur la section droite mn et qui représentent l'action du tronçon droit de la poutre sur le tronçon gauche. Ces efforts internes doivent équilibrer les efforts externes déjà mentionnés, P_1, P_2 et R_1.

Afin de simplifier l'étude ultérieure il est plus avantageux de remplacer le système réel des efforts externes par un système simplifié équivalent. D'après les lois de la statique on sait qu'un système de forces parallèles peut être remplacé par une résultante égale à la somme algébrique des forces données et par un couple. Dans notre cas particulier, on remplace les efforts P_1, P_2 et R_1 par une force verticale V agissant dans le plan de la section mn et par un couple M. La valeur de la force est

$$V = R_1 - P_1 - P_2 \,, \tag{a}$$

et celle du couple est

$$M = R_1 x - P_1 (x - c_1) - P_2 (x - c_2) \,. \tag{b}$$

La force V, somme algébrique des forces externes appliquées à gauche de la section mn, s'appelle *effort tranchant* dans la section mn. Le couple M, qui est égal à la somme algébrique des moments des forces externes appliquées à gauche de la section mn, par rapport au centre de gravité de cette section, est appelé *moment fléchissant* dans la section mn. Ainsi le système des forces externes à gauche de la section mn est remplacé par le système statiquement équivalent se composant de l'effort tranchant V agissant dans le plan de la section transversale et du couple M (fig. 61*c*). Les contraintes, réparties sur la section transversale mn et qui représentent l'action de la portion droite de la poutre sur sa portion gauche, doivent donc faire équilibre au moment fléchissant M et à l'effort tranchant V.

Le même raisonnement reste valable lorsque nous avons affaire à une sollicitation répartie au lieu de plusieurs charges concentrées sur une poutre. Considérons, par exemple, la poutre uniformément chargée de la figure 62*a*. Soit q la charge par unité de longueur, les réactions sont dans ce cas

$$R_1 = R_2 = \frac{ql}{2}.$$

On recherche la répartition des contraintes sur une section mn en prenant en considération l'équilibre du tronçon gauche de la poutre (fig. 62*b*). Les efforts externes agissant sur cette portion de la poutre sont les réactions R_1 et la charge uniformément répartie sur la longueur x. La résultante de cette charge est naturellement égale à qx. La somme algébrique de tous les efforts s'exerçant à gauche de la section mn est donc $R_1 - qx$. On obtient la somme algébrique des moments de tous les efforts situés à gauche de la section mn, par rapport à son centre de gravité, en sous-

trayant le moment de la résultante de la charge répartie du moment R_1x de la réaction. Le moment de la charge répartie est évidemment égal à

$$qx \cdot \frac{x}{2} = \frac{qx^2}{2}.$$

On exprime donc la somme algébrique des moments par l'expression :

$$R_1 x - \frac{qx^2}{2}.$$

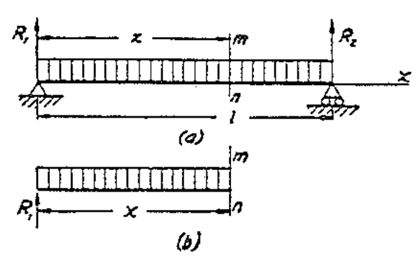


Fig. 62.

On remplace alors tous les efforts agissant sur la portion gauche de la poutre par une force unique s'exerçant dans le plan de la section mn et égale à

$$V = R_1 - qx = q\left(\frac{l}{2} - x\right), \qquad (c)$$

et par un couple égal à

$$M = R_1 x - \frac{qx^2}{2} = \frac{qx}{2}(l - x). \qquad (d)$$

Les expressions (c) et (d) représentent respectivement l'effort tranchant et le moment fléchissant sur la section mn.

Dans les exemples ci-dessus nous avons étudié l'équilibre de la portion gauche de la poutre. Si l'on tient compte de la portion droite, la somme algébrique des efforts à droite de la section et la somme algébrique des moments de ces efforts auront les mêmes valeurs, V et M, déjà calculées, mais seront de sens opposés. Ceci découle du fait que les charges s'exerçant sur une poutre ainsi que les réactions R_1, R_2 représentent un système de forces en équilibre; et le moment de toutes ces forces, par rapport à un point quelconque de leur plan, aussi bien que leur somme algébrique, est nul. Par suite le moment des forces agissant sur la portion gauche de la poutre, par rapport au centre de gravité de la section mn, est égal et opposé au moment, par rapport au même point, des forces s'exerçant sur la portion droite de cette poutre. De même, la somme

algébrique des forces agissant sur la portion gauche est égale et opposée à celle des forces s'exerçant sur la partie droite.

Désormais le moment fléchissant et l'effort tranchant, sur la section mn, seront positifs lorsque, considérant le tronçon gauche d'une poutre, les directions obtenues sont celles représentées sur la figure 61c. Afin de concrétiser cette convention de signe, adoptée pour les moments fléchissants, considérons un élément de la poutre isolé par deux sections voisines mn et m_1n_1 (fig. 63). Si les moments fléchissants dans ces sections

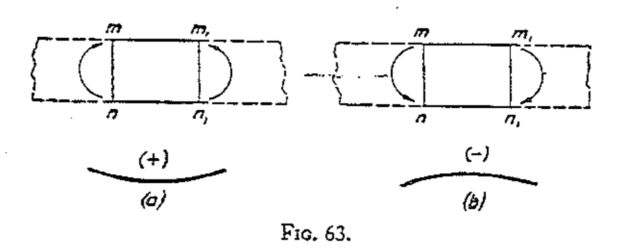


Fig. 63.

sont positifs, les forces à gauche de la section mn donneront naissance à un moment orienté dans le sens des aiguilles d'une montre et les forces à droite de la section m_1n_1 à un moment dirigé en sens inverse des aiguilles d'une montre (voir fig. 63a). On remarque donc que les directions de ces moments créent une flexion convexe vers le bas. Si les moments fléchissants, dans les sections mn et m_1n_1, sont négatifs, on obtient alors une flexion convexe vers le haut (voir fig. 63b). Finalement, dans les portions d'une poutre où le moment fléchissant est positif, la ligne élastique est convexe vers le bas, tandis que dans les parties où le moment fléchissant est négatif, la ligne élastique est convexe vers le haut.

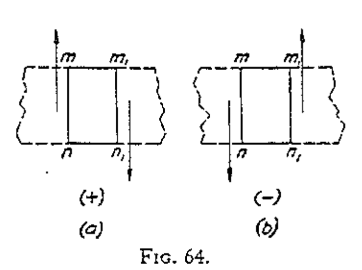


Fig. 64.

La figure 64 indique la convention de signe choisie pour l'effort tranchant.

Problèmes

1. Déterminer l'effort tranchant V et le moment fléchissant M sur une section située à 1,22 m de l'extrémité gauche de la poutre de la figure 59a. On prend $a = 1{,}83$ m, $l = 3{,}05$ m et $P = 4\,536$ daN.

Réponse. $V = 1\,814{,}4$ daN, $M = 22\,121$ m · N.

2. Calculer l'effort tranchant V et le moment fléchissant M sur une section mn à 0,61 m de l'extrémité gauche de la poutre représentée sur la figure 59a, sachant que $a = 2{,}44$ m et $P = 5\,443{,}2$ daN.

Réponse $V = 5\,443{,}2$ daN, $M = -99\,443$ m · N.

3. Calculer l'effort tranchant et le moment fléchissant d'une section mn de la poutre représentée sur la figure 61a. On prend $P_1 = P_2 = 5\,443{,}2$ daN, $P_3 = 0$, $c_1 = 0{,}61$ m, $c_2 = 1{,}22$ m, $x = 1{,}83$ m et $l = 3{,}66$ m.

Réponse. $V = 0$, $M = 11\,060$ m · N.

21. Relation entre moment fléchissant et effort tranchant

Considérons un élément de poutre pris entre deux sections très voisines mn et m_1n_1, distantes de dx (fig. 65). Nous supposons que le moment fléchissant et l'effort tranchant sont positifs sur la section mn, l'influence de la partie gauche de la poutre, sur l'élément, est représentée par l'effort V

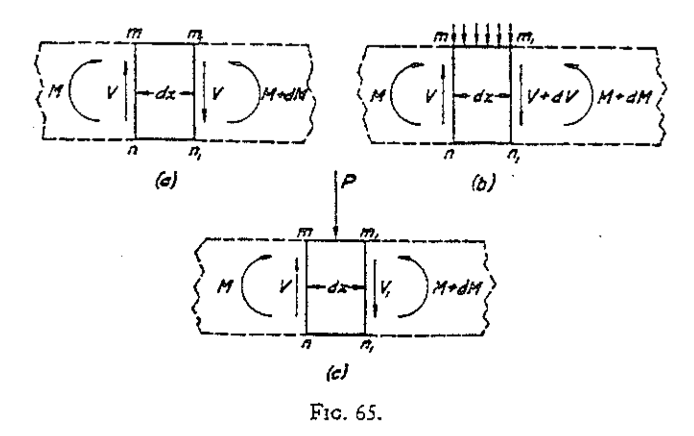


FIG. 65.

et le couple M, comme l'indique la figure 65a. De la même manière, supposons que sur la section m_1n_1 moment fléchissant et effort tranchant soient positifs, l'influence de la partie droite de la poutre sur l'élément étant représentée par un couple et un effort. Si aucune force ne s'exerce sur la poutre, entre les sections mn et m_1n_1 (fig. 65a), les efforts tranchants sur ces deux sections sont égaux ([1]). Quant aux moments fléchissants, on constate d'après l'équilibre de l'élément qu'ils sont différents et que

([1]) On néglige le poids de l'élément de poutre dans cette étude.

l'accroissement dM du moment fléchissant est égal au moment du couple représenté par deux efforts V égaux et opposés, c'est-à-dire,

$$\mathrm{d}M = V\mathrm{d}x$$

et

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} = V. \tag{50}$$

Ainsi, sur toute portion de poutre comprise entre des charges l'effort tranchant est la dérivée, par rapport à x, du moment fléchissant.

Considérons enfin le cas où une charge répartie, d'intensité q, s'exerce entre les sections mn et m_1n_1 (fig. 65b). La charge totale appliquée sur l'élément est qdx. Si q est compté positivement lorsque la charge est dirigée vers le bas, on conclut, d'après l'équilibre de l'élément, que l'effort tranchant sur m_1n_1 est différent de l'effort sur mn d'une quantité

$$\mathrm{d}V = -q\mathrm{d}x,$$

d'où l'on tire

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = -q. \tag{51}$$

Donc, la dérivée de l'effort tranchant, par rapport à x, est égale à l'intensité de la charge précédée du signe moins.

Le moment de tous les efforts agissant sur l'élément est

$$\mathrm{d}M = V\mathrm{d}x - q\mathrm{d}x \times \tfrac{1}{2}\mathrm{d}x.$$

Négligeant le second terme du second membre, comme infiniment petit du second ordre, on retombe sur l'équation (50) et l'on conclut que dans le cas d'une charge répartie, l'élément différentiel du moment fléchissant est égal à celui de l'effort tranchant.

Lorsqu'une charge concentrée P s'exerce entre deux sections adjacentes mn, m_1n_1 (fig. 65c), l'effort tranchant varie brusquement. Soit V cet effort sur la section mn et V_1 sur m_1n_1. L'équation d'équilibre de l'élément mm_1n_1n nous permet d'écrire

$$V_1 = V - P.$$

Ainsi la grandeur de l'effort tranchant varie d'une quantité P lorsqu'on dépasse le point d'application de la charge. D'après l'équation (50) on conclut alors qu'au point d'application d'un effort concentré la dérivée dM/dx varie brutalement.

22. Diagrammes du moment fléchissant et de l'effort tranchant

On a vu, lors de l'étude précédente, que les contraintes appliquées sur la section mn d'une poutre équilibrent le moment fléchissant M et l'effort tranchant V sur cette section. Donc, les valeurs de M et V sur une section quelconque déterminent la valeur des contraintes s'exerçant sur cette même section. La représentation graphique de la variation du moment fléchissant et de l'effort tranchant simplifie judicieusement l'étude des contraintes dans une poutre. Les abscisses du graphique situent la position de la section tandis que les ordonnées représentent la valeur du moment fléchissant ou de l'effort tranchant s'exerçant sur cette section. Les valeurs positives sont portées au-dessus de l'axe horizontal, les valeurs négatives au-dessous. Les graphiques ainsi obtenus constituent respectivement les *diagrammes du moment fléchissant* et de *l'effort tranchant*.

Considérons une poutre en appui simple soumise à une charge unique P (fig. 66) (²). Les réactions sont dans ce cas

$$R_1 = \frac{Pb}{l} \qquad \text{et} \qquad R_2 = \frac{Pa}{l}.$$

Soit une section mn située à gauche de P, l'on conclut que sur cette section

$$V = \frac{Pb}{l} \qquad \text{et} \qquad M = \frac{Pb}{l}x. \qquad (a)$$

L'effort tranchant et le moment fléchissant ont les sens indiqués sur les figures 63a et 64a, ils sont positifs. Nous remarquons que l'effort tranchant reste constant le long de la portion de poutre située à gauche de la charge, tandis que le moment fléchissant est proportionnel à x. Pour $x = 0$, le moment fléchissant est nul et pour $x = a$, c'est-à-dire au droit du point d'application de la charge, le moment est égal à Pab/l. Les diagrammes correspondants de l'effort tranchant et du moment fléchissant sont représentés respectivement par les segments de droite ac et a_1c_1 (voir fig. 66b et 66c). Pour une section située à droite de la charge, nous obtenons

$$V = \frac{Pb}{l} - P \qquad \text{et} \qquad M = \frac{Pb}{l}x - P(x-a), \qquad (b)$$

(²) Dans un but de simplification on ne représente pas les rouleaux placés sous les appuis mobiles dans les figures correspondantes.

x représentant encore la distance comptée à partir de l'extrémité gauche de la poutre. L'effort tranchant pour cette portion de la poutre reste constant et négatif. Sur la figure 66b cet effort est représenté par le segment de droite $c'b$ parallèle à l'axe des x. Le moment fléchissant est une fonction linéaire de x, il est égal à Pab/l pour $x = a$, et à zéro pour $x = l$. Ce moment est toujours positif et sa variation, le long de la portion droite de la poutre, est représentée par c_1b_1 sur la figure 66c. Les lignes brisées $acc'b$ et $a_1c_1b_1$, sur les figures 66b et 66c, représentent les diagrammes de l'effort tranchant et du moment fléchissant pour toute la longueur de la poutre. Au droit de la charge P l'effort tranchant varie brusquement de $+Pb/l$ à $-Pa/l$ tandis que le diagramme du moment fléchissant change de pente.

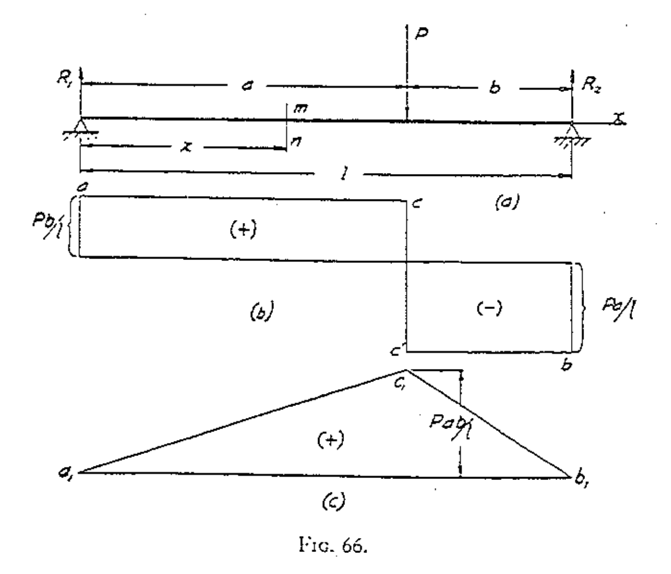


Fig. 66.

Pour établir les expressions (b) ci-dessus, nous avons pris en considération la partie gauche de la poutre, laquelle est soumise à deux forces : R_1 et P. Il eût été plus simple, dans ce cas, de considérer la partie droite de la poutre sur laquelle ne s'exerce que la réaction Pa/l. Adoptons ce procédé et utilisons la règle des signes indiquée plus haut, nous obtenons

$$V = -\frac{Pa}{l} \qquad \text{et} \qquad M = \frac{Pa}{l}(l-x). \qquad (c)$$

Les expressions (b) précédemment calculées peuvent aussi s'écrire sous cette dernière forme en remarquant que $a = l - b$.

Il est intéressant de noter que le diagramme de l'effort tranchant se compose de deux rectangles d'aires égales. Tenant compte de l'opposition des signes de ces aires, l'on conclut que l'aire totale du diagramme de l'effort tranchant est nulle. Ce résultat n'est pas fortuit. En effet, intégrons l'équation (50), il vient

$$\int_A^B \mathrm{d}M = \int_A^B V \mathrm{d}x, \qquad (d)$$

où les limites A et B indiquent que l'intégration s'opère sur toute la longueur de la poutre de l'extrémité A à l'extrémité B. Le second membre de (d) représente alors l'aire totale du diagramme de l'effort tranchant. Le premier membre de la même équation, après intégration, exprime la différence $M_B - M_A$ des moments fléchissants aux extrémités B et A. Dans

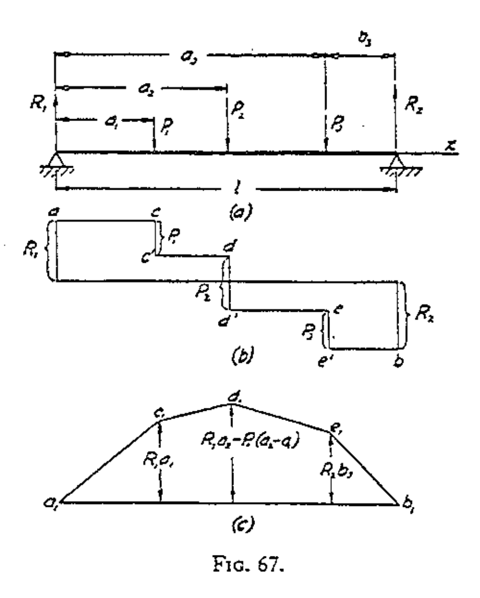


FIG. 67.

le cas d'une poutre en appui simple les moments disparaissent aux extrémités. Par suite, l'aire totale du diagramme de l'effort tranchant est nulle.

Lorsque plusieurs charges s'exercent sur une poutre (fig. 67), on divise celle-ci en plusieurs parties et l'on établit les expressions de V et M pour

chaque partie. Comptons x à partir de l'extrémité gauche de la poutre et soit $x < a_1$, on obtient pour la première partie de la poutre

$$V = R_1 \qquad \text{et} \qquad M = R_1 x. \qquad (e)$$

Pour la deuxième portion de la poutre, c'est-à-dire pour $a_1 < x < a_2$, nous avons

$$V = R_1 - P_1 \qquad \text{et} \qquad M = R_1 x - P_1 (x - a_1). \qquad (f)$$

Pour la troisième portion, $a_2 < x < a_3$, il est plus commode d'opérer avec la partie droite de la poutre. Dans ce cas on obtient

$$V = -(R_2 - P_3)$$

et

$$M = R_2 (l - x) - P_3 (l - x - b_3). \qquad (g)$$

Enfin, pour la dernière portion nous avons :

$$V = -R_2, \qquad M = R_2 (l - x). \qquad (h)$$

On remarquera, à l'aide des expressions (e) à (h), que dans chaque portion de la poutre l'effort tranchant reste invariable. Par suite, le diagramme de l'effort tranchant est celui de la figure 67b. Le moment fléchissant, dans chaque portion de la poutre, est une fonction linéaire de x ; son diagramme est représenté par une ligne droite inclinée. Pour tracer ces droites nous remarquerons, d'après les équations (e) et (h), que les moments sont nuls aux extrémités $x = 0$ et $x = l$. Les moments au droit des charges s'obtiennent en substituant respectivement, dans les expressions (e), (f) et (h), x à a_1, a_2 et a_3. Nous avons ainsi :

$$M = R_1 a_1, \qquad M = R_1 a_2 - P_1 (a_2 - a_1), \qquad M = R_2 b_3.$$

Ces différentes valeurs nous permettent de construire aisément le diagramme de la figure 67c.

Dans les applications pratiques il est important de déterminer les sections pour lesquelles le moment fléchissant atteint un maximum ou un minimum. Dans le cas de charges concentrées, que nous venons d'étudier (fig. 67), le moment fléchissant maximum se produit au droit de la charge P_2. Cette charge correspond, sur le diagramme du moment fléchissant, au point d_1, point où la pente du diagramme change de signe. Par ailleurs, nous savons d'après (50) que la pente du diagramme du moment fléchissant, en un point quelconque, est égale à l'effort tranchant. Par suite le moment est maximum ou minimum dans les sections où l'effort tranchant change de signe. Lorsque l'effort tranchant passe d'une valeur

positive à une valeur négative le long de l'axe x, comme par exemple au droit de la charge P (fig. 67), la pente du diagramme du moment fléchissant change également de signe et devient négative en même temps que l'effort tranchant. Le moment fléchissant est donc maximum dans cette section. Le passage de V d'une valeur négative à une valeur positive indique un minimum du moment fléchissant. Dans le cas général, le diagramme de l'effort tranchant coupe l'axe horizontal en plusieurs points. A chacun de ces points correspond alors un maximum ou un minimum du diagramme du moment fléchissant. Il est nécessaire de rechercher les valeurs numériques de tous ces maximums et minimums afin de déterminer numériquement le plus grand moment fléchissant.

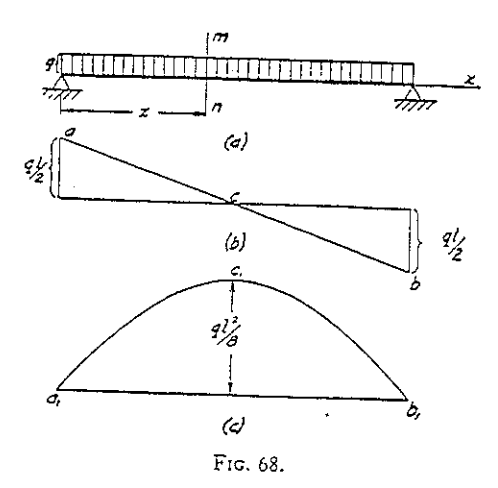


Fig. 68.

Considérons le cas d'une charge uniformément répartie (fig. 68). D'après ce qui précède (p. 72), nous avons, pour une section située à une distance x du support gauche,

$$V = q\left(\frac{l}{2} - x\right) \qquad \text{et} \qquad M = \frac{qx}{2}(l-x)\,. \qquad (i)$$

On notera que dans ce cas le diagramme de l'effort tranchant est une droite oblique pour laquelle les ordonnées en $x = 0$ et $x = l$ sont $ql/2$ et $-ql/2$ (voir fig. 68*b*). Par contre, d'après l'expression (*i*), le moment fléchissant est représenté par une parabole dont l'axe vertical passe par le milieu de la poutre (fig. 68*c*). Les moments aux extrémités $x = 0$ et $x = l$ sont nuls ; et la valeur maximum du moment apparaît à mi-portée, là où l'effort tranchant change de signe. On obtient ce maximum en faisant $x = l/2$ dans l'expression (*i*), ce qui donne $M_{max} = ql^2/8$.

Dans le cas d'une charge uniforme q ne recouvrant qu'une partie de la portée (fig. 69), on analysera séparément chacune des trois parties de longueur a, b, c. Commençons par déterminer les réactions R_1 et R_2, à

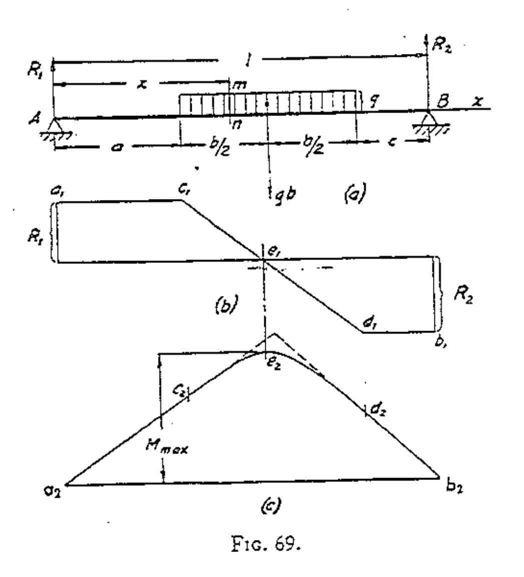


Fig. 69.

cet effet on remplace la charge uniformément distribuée par sa résultante qb. D'après les équations de la statique des moments par rapport à B et A, on obtient

$$R_1 = \frac{qb}{l}\left(c + \frac{b}{2}\right) \qquad \text{et} \qquad R_2 = \frac{qb}{l}\left(a + \frac{b}{2}\right).$$

L'effort tranchant et le moment fléchissant, pour la portion de poutre gauche non sollicitée ($0 < x < a$), sont

$$V = R_1 \qquad \text{et} \qquad M = R_1 x\,. \qquad (j)$$

L'effort tranchant d'une section mn, prise dans la partie sollicitée de la poutre, s'obtient en retranchant de la réaction R_1 la charge $q(x-a)$ appliquée à gauche de la section considérée. Le moment fléchissant dans cette même section s'obtient en soustrayant le moment de la charge, appliquée à gauche de celle-ci, du moment de la réaction R_1. On trouve ainsi

$$V = R_1 - q\,(x-a)$$

et

$$M = R_1 x - q\,(x-a) \times \tfrac{1}{2}(x-a)\,. \qquad (k)$$

Enfin, pour la portion de droite non sollicitée nous avons, en tenant compte des forces appliquées à droite d'une section quelconque,

$$V = -R_2 \qquad \text{et} \qquad M = R_2\,(l-x)\,. \tag{l}$$

Les expressions (*j*), (*k*) et (*l*) permettent alors de construire aisément les diagrammes de l'effort tranchant et du moment fléchissant. Le diagramme de l'effort tranchant (fig. 69*b*) se compose de segments de droites horizontaux a_1c_1 et d_1b_1 correspondant aux parties non sollicitées de la poutre et c_1d_1 correspond à la portion uniformément chargée. Le diagramme du moment fléchissant (fig. 69*c*) se compose de deux segments de droites obliques a_2c_2 et b_2d_2 correspondant aux parties non sollicitées et d'une parabole $c_2e_2d_2$ à axe vertical figurant la partie de poutre sous charge. Le moment fléchissant maximum se situe au point e_2 qui correspond au point e_1 où l'effort tranchant change de signe. En c_2 et d_2 la parabole est tangente aux droites obliques a_2c_2 et d_2b_2. Ceci découle du fait qu'aux points c_1 et d_1, du diagramme de l'effort tranchant, il ne se produit pas de variation brusque de l'effort tranchant. Par suite, en vertu de l'équation (50), il ne peut y avoir de changement brusque de la pente du diagramme du moment fléchissant aux points correspondants c_2 et d_2.

Dans le cas d'une poutre cantilever (fig. 70), on utilise la même méthode que précédemment pour construire les diagrammes de l'effort tranchant et du moment fléchissant. Mesurant x à partir de l'extrémité gauche de la poutre et considérant la portion à gauche de la charge P_2 $(0 < x < a)$, on obtient

$$V = -P_1 \qquad \text{et} \qquad M = -P_1 x\,.$$

Le signe négatif de ces expressions résulte de la règle des signes des figures 63*b* et 64*b*. Nous avons, pour la portion droite de la poutre $(a < x < l)$.

$$V = -P_1 - P_2 \qquad \text{et} \qquad M = -P_1 x - P_2\,(x-a)\,.$$

Les figures 70*b* et 70*c* donnent les diagrammes correspondants de l'effort tranchant et du moment fléchissant. L'aire totale du diagramme de l'effort tranchant ne disparaît pas dans ce cas et sa valeur est $-P_1 l - P_2 b$, qui représente le moment fléchissant M_B à l'extrémité B de la poutre. Le diagramme du moment fléchissant se compose de deux segments de droites obliques a_2c_2 et c_2b_2 dont les pentes sont égales aux valeurs de

l'effort tranchant sur les parties correspondantes de la poutre cantilever. Le maximum numérique du moment fléchissant est localisé à l'extrémité encastrée B de la poutre.

Si une poutre cantilever supporte une charge uniforme (fig. 71), l'effort tranchant et le moment fléchissant, à une distance x de l'extrémité gauche, sont

$$V = -qx \qquad \text{et} \qquad M = -qx\cdot\frac{x}{2} = -\frac{qx^2}{2}\,.$$

L'effort tranchant est représenté sur la figure 71*b* par la droite oblique *ab* et le moment fléchissant (fig. 71*c*) par la parabole a_1b_1 dont l'axe est vertical et qui est tangente à l'axe horizontal en a_1, là où l'effort tranchant

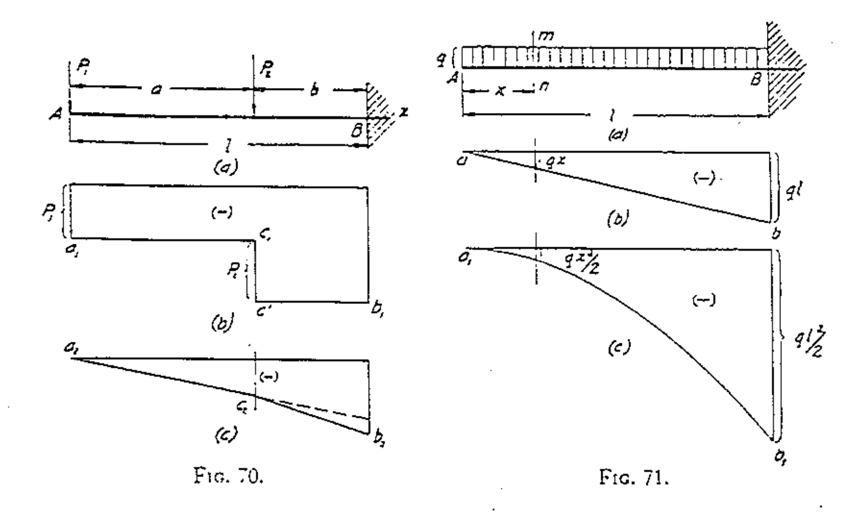


Fig. 70. Fig. 71.

s'annule. Le moment fléchissant et l'effort tranchant sont maximums à l'extrémité B de la poutre.

Si la poutre est soumise simultanément à des charges concentrées et distribuées, il est préférable de tracer les diagrammes séparément pour chaque cas de charge et l'on obtient les valeurs totales V et M, d'une section quelconque, en sommant les ordonnées correspondantes des deux diagrammes partiels. Si, par exemple, nous avons affaire aux charges

concentrées P_1, P_2, P_3 de la figure 67 agissant simultanément avec la charge uniforme de la figure 68, le moment fléchissant d'une section quelconque se calcule par sommation des ordonnées correspondantes des diagrammes des figures 67*c* et 68*c*.

Problèmes

1. Tracer, approximativement à l'échelle, les diagrammes de l'effort tranchant et du moment fléchissant des poutres de la figure 72. Indiquer aussi la position des maximums positifs et négatifs des efforts tranchants et des moments fléchissants.

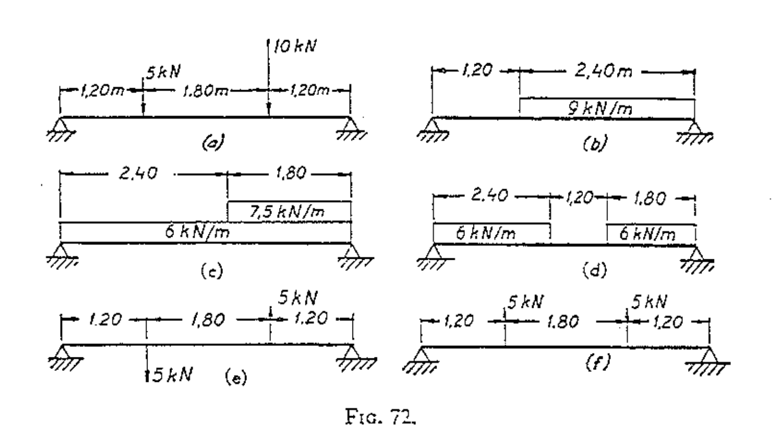


Fig. 72.

2. Même énoncé qu'au problème 1 mais appliqué aux poutres cantilever de la figure 73.

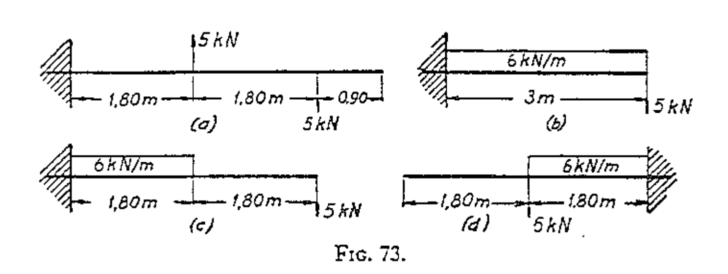


Fig. 73.

3. Une poutre cantilever, encastrée à son extrémité droite, est soumise à une charge totale W qui augmente uniformément d'intensité à partir de la valeur zéro à l'extrémité gauche. Cette charge est représentée par la droite AC sur la figure 74*a*. Tracer les diagrammes de l'effort tranchant et du moment fléchissant.

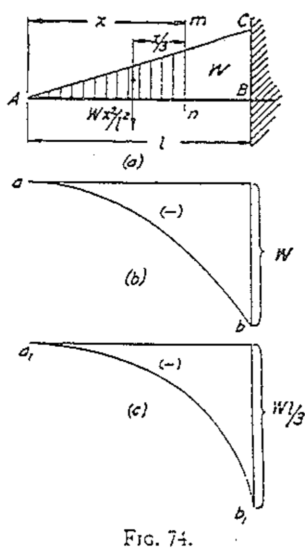


Fig. 74.

Solution. L'effort tranchant en une section mn, située à une distance x de l'extrémité gauche, est numériquement égal à la partie hachurée représentant la charge. Puisque la charge totale W équivaut au triangle ACB la partie hachurée est Wx^2/l^2. D'après la règle des signes, figure 64, nous obtenons

$$V = -W\frac{x^2}{l^2}.$$

La parabole ab (fig. 74*b*) représente donc le diagramme de l'effort tranchant, son axe vertical passe par a. Le moment fléchissant dans la section mn s'obtient en considérant le moment de la partie hachurée du diagramme de charge par rapport au centre de gravité de la section mn. Donc

$$M = -W\frac{x^2}{l^2}\cdot\frac{x}{3}.$$

Ce moment est représenté par la courbe a_1b_1 de la figure 74*c*.

4. Une poutre de longueur l, en appui uniforme sur toute sa longueur, supporte deux charges égales P sur ses extrémités (fig. 75). Tracer les diagrammes de l'effort tranchant et du moment fléchissant.

Réponse. Les diagrammes sont ceux des figures 68*b* et 68*c* où il suffit de remplacer ql par $-2P$.

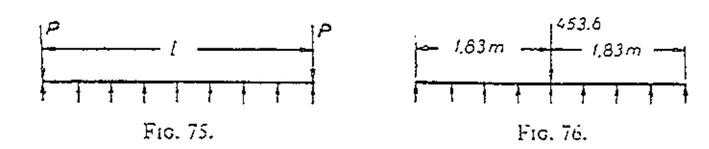


Fig. 75. Fig. 76.

5. Une poutre de longueur $l = 3{,}66$ m, en appui sur toute sa longueur, supporte au centre une charge concentrée $P = 453{,}6$ daN (fig. 76). Calculer la valeur maximum du moment fléchissant. Construire les diagrammes de l'effort tranchant et du moment fléchissant.

Réponse. $M_{max} = 2\,075$ m · N. Les diagrammes pour chaque moitié de poutre sont ceux des figures 71*b* et 71*c*.

6. Une poutre en appui simple de longueur l supporte une charge totale W croissant uniformément en intensité à partir de zéro à l'extrémité gauche (voir fig. 77*a*). Construire, approximativement à l'échelle, les diagrammes de l'effort tranchant et du moment fléchissant, pour $W = 5\,443$ daN et $l = 7{,}32$ m.

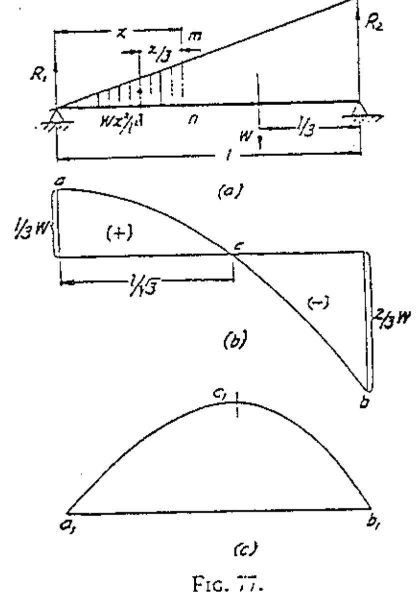


Fig. 77.

Solution. Les réactions d'appui sont dans ce cas $R_1 = \frac{1}{3} W = 1\,814{,}3$ daN et $R_2 = 3\,628{,}7$ daN. L'effort tranchant dans une section mn s'obtient en retranchant de la réaction R_1 la partie hachurée de la charge. Par suite

$$V = R_1 - W\frac{x^2}{l^2} = W\left(\frac{1}{3} - \frac{x^2}{l^2}\right).$$

Le diagramme de l'effort tranchant est représenté par la parabole abc de la figure 77*b*. Le moment fléchissant d'une section mn est

$$M = R_1 x - W\frac{x^2}{l^2}\cdot\frac{x}{3}$$

$$= \frac{1}{3} W x\left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right).$$

Ce moment est figuré par la courbe $a_1 b_1 c_1$ de la figure 77*c*. Le moment fléchissant maximum est en c_1, là où l'effort tranchant change de signe, c'est-à-dire, pour $x = l/\sqrt{3}$.

7. Une poutre en appui simple AB supporte une charge dont l'intensité varie comme l'indique la ligne ACB de la figure 78. Trouver les expressions de l'effort tranchant et du moment fléchissant d'une section mn.

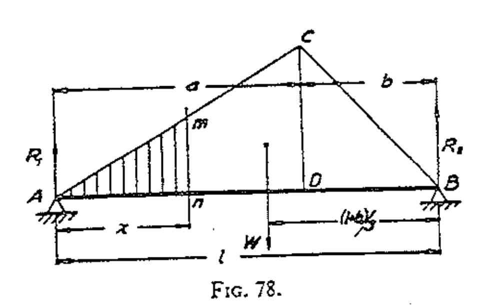


Fig. 78.

Solution. Supposons la charge totale W appliquée au centre de gravité du triangle ACB, les réactions d'appui sont

$$R_1 = W\frac{l+b}{3\,l} \qquad \text{et} \qquad R_2 = W\frac{l+a}{3\,l}.$$

La charge totale se décompose alors en deux parties, représentées par les triangles ACD et CBD, de valeurs respectives Wa/l et Wb/l. La portion hachurée de la charge est égale à $(Wa/l)(x^2/a^2) = Wx^2/al$. Pour l'effort tranchant et le moment fléchissant dans mn, on obtient

$$V = R_1 - W\frac{x^2}{al} \qquad \text{et} \qquad M = R_1 x - W\frac{x^2}{al}\cdot\frac{x}{3}.$$

On calcule d'une manière analogue l'effort tranchant et le moment fléchissant d'une section de la partie DB de la poutre.

8. Calculer M_{max} dans le problème précédent, sachant que $l = 3{,}66$ m, $b = 91{,}5$ cm et $W = 5\,443$ daN.

Réponse. $M_{max} = 30\,980$ m · N.

9. Construire à une échelle approximative les diagrammes de l'effort tranchant et du moment fléchissant, et indiquer l'emplacement des plus grandes valeurs positives et négatives des efforts tranchants et des moments fléchissants des poutres en porte-à-faux d'extrémité de la figure 79.

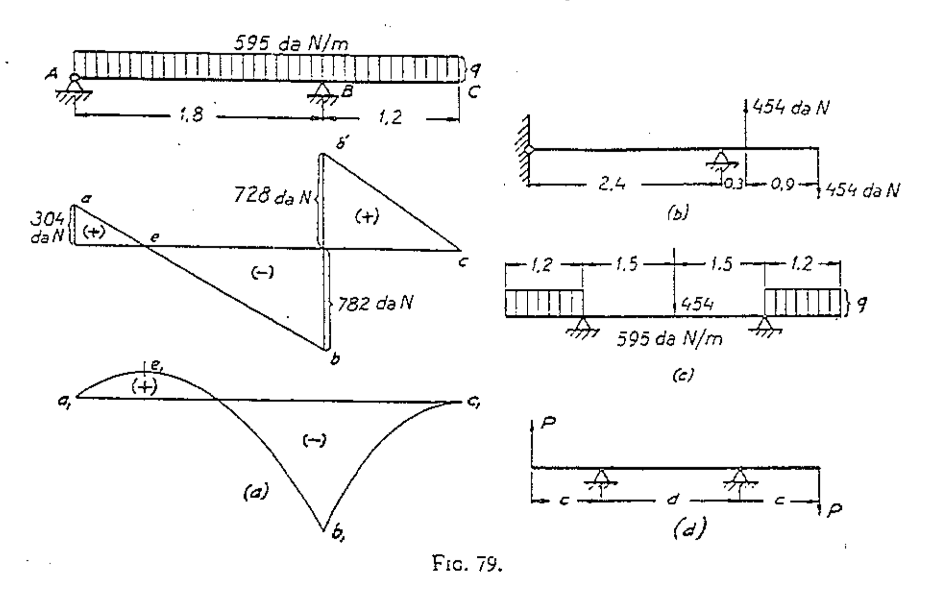


Fig. 79.

Solution. Dans le cas de la figure 79*a* les réactions sont 304 daN et 1 510 daN. L'effort tranchant dans la partie gauche de la poutre est

$V = 304 - 595\ x$. Il est figuré par le segment de droite oblique ab. L'effort tranchant de la partie droite de la poutre se calcule comme pour une poutre cantilever et il est représenté par $b'c$ sur la figure. Le moment fléchissant de la partie gauche de la poutre est $M = 304x - 595x^2/2$. Il est représenté par la parabole $a_1e_1b_1$. Son maximum, en e_1, correspond au point e pour lequel l'effort tranchant change de signe. Le diagramme du moment fléchissant de la partie droite est le même que pour une poutre cantilever et il est représenté par la parabole b_1c_1 tangente en c_1.

10. Une poutre de longueur l, comportant deux porte-à-faux égaux (fig. 80), est sollicitée par une charge uniformément répartie. Calculer la distance d entre appuis de manière que le moment fléchissant à mi-portée

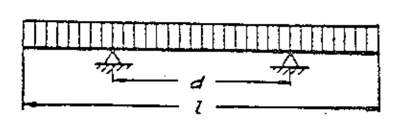


FIG. 80.

soit égal aux moments sur appuis. Construire dans ce cas les diagrammes de l'effort tranchant et du moment fléchissant.

Réponse. $d = 0{,}586\ l$.

4

CONTRAINTES DANS LES POUTRES SYMÉTRIQUES CHARGÉES TRANSVERSALEMENT

23. Flexion pure

Nous avons mentionné, au chapitre précédent, que la valeur des contraintes, dans une section quelconque d'une poutre, est définie par la valeur de l'effort tranchant et du moment fléchissant dans cette section. Pour calculer ces contraintes commençons par le cas où l'effort tranchant est nul et seul s'exerce le moment fléchissant. Ce cas s'appelle *flexion pure*. La figure 81 représente un tel cas de flexion. Par raison de symétrie on conclut que les réactions sont, dans ce cas, égales à P. Considérons l'équilibre de la partie de la poutre située à gauche de la section mn, on conclut que les forces internes réparties sur la section mn et représentant l'action de la partie droite, ôtée, de la poutre sur la partie gauche, sont statiquement équivalentes à un couple et sont opposées au moment fléchissant Pa. On tiendra compte de la déformation de la poutre, pour le calcul de la distribution de ces efforts internes sur la section transversale. Dans le cas simple d'une poutre possédant un plan de symétrie longitudinal dans lequel s'exercent les couples de flexion externes, la flexion apparaîtra dans ce même plan. Si la poutre a une section transversale rectangulaire et si l'on tire deux lignes verticales, voisines, mm et pp sur l'une de ses faces, l'expérience prouve que ces lignes restent droites pendant la flexion mais elles subissent une rotation de façon à rester perpendiculaires aux fibres longitudinales de la poutre (fig. 82). La théorie que nous allons développer au sujet de la flexion est fondée sur l'hypothèse suivant laquelle non seulement les lignes telles que mm restent droites, mais aussi toute la section transversale de la poutre, initialement plane, reste plane et normale aux fibres

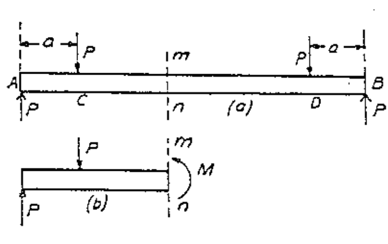


FIG. 81.

longitudinales de la poutre après flexion. Les expériences montrent que cette hypothèse donne des résultats très précis concernant la flèche des poutres et la déformation des fibres longitudinales. Il s'ensuit que, durant la flexion, les sections *mm* et *pp* tournent l'une par rapport à l'autre, autour d'axes perpendiculaires au plan de flexion, si bien que les fibres longitudinales, sur la face convexe, subissent une tension tandis que celles de la face concave sont en compression. La ligne nn_1 est la trace de la surface dans laquelle les fibres ne subissent pas de déformation pendant la flexion. Cette surface est la *surface neutre* et son intersection avec une section transversale quelconque est appelée *axe neutre*. On obtient l'allongement $s's_1$ d'une fibre, située à une distance y de la surface neutre, en

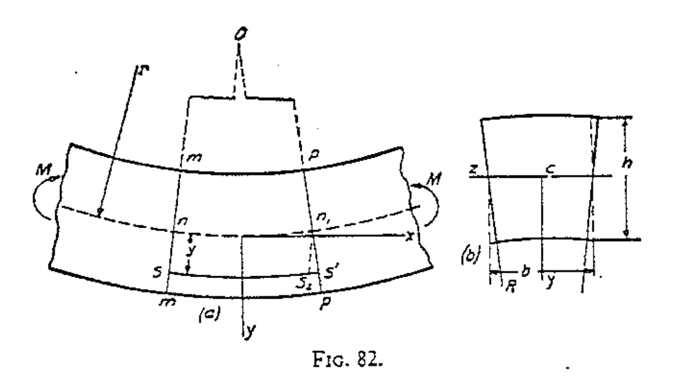


FIG. 82.

traçant une ligne n_1s_1 parallèle à *mm* (fig. 82*a*). Soit r le rayon de courbure de la ligne moyenne (¹) déformée de la poutre, utilisons les relations de similitude des triangles non_1 et s_1n_1s', l'allongement unitaire de la fibre ss' est

$$\varepsilon_x = \frac{s's_1}{nn_1} = \frac{y}{r}. \tag{52}$$

On remarquera que les déformations des fibres longitudinales sont proportionnelles à la distance y les séparant de la surface neutre et inversement proportionnelles au rayon de courbure.

L'expérience pratique nous apprend que l'extension longitudinale des fibres, sur la face convexe de la poutre, s'accompagne d'une *contraction latérale* ; la compression longitudinale, sur la face concave, s'accompagne

(¹) La ligne moyenne de la poutre est le lieu géométrique des centres de gravité de ses sections transversales. Le centre de courbure est représenté par O.

d'une dilatation latérale égale à la contraction, ceci se passe comme dans le cas de la traction simple ou de la compression (voir § 14). Ce phénomène modifie la forme des sections transversales, les côtés verticaux de la section rectangulaire deviennent concourants comme l'indique la figure 82*b*. La déformation unitaire suivant la direction latérale est

$$\varepsilon_z = -\mu\varepsilon_x = -\mu\frac{y}{r}, \tag{53}$$

où μ désigne le coefficient de Poisson. En raison de la distorsion, toutes les lignes droites de la section transversale, parallèles à l'axe des z, s'incurvent de manière à rester normales aux côtés de la section. Leur rayon de courbure R est plus grand que r dans la même proportion que ε_x est supérieur à ε_z en valeur absolue (voir éq. 53). Nous avons donc

$$R = \frac{1}{\mu} r. \tag{54}$$

A l'aide de la loi de Hooke (éq. 4, p. 4) on déduit de la déformation des fibres longitudinales les contraintes correspondantes :

$$\sigma_x = \frac{Ey}{r}. \tag{55}$$

La figure 83 montre la distribution de ces contraintes. La contrainte, dans une fibre quelconque, est proportionnelle à la distance qui la sépare de l'axe neutre *nn*. On peut alors déterminer la position de l'axe neutre et le rayon de courbure r, qui sont les deux inconnues de l'équation (55), par la condition suivante : les efforts répartis sur toute la section de la poutre doivent créer un *couple résistant* s'opposant au couple M des efforts extérieurs (fig. 81).

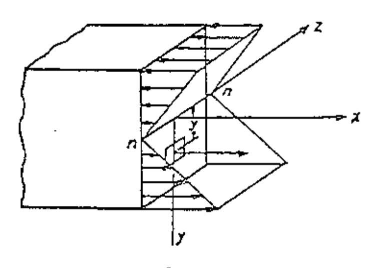


FIG. 83.

Soit dA l'aire élémentaire d'une section située à une distance y de l'axe neutre (fig. 83). L'effort agissant sur cette aire élémentaire est le produit de la contrainte (éq. 55) par l'aire dA, c'est-à-dire, $(Ey/r)\mathrm{d}A$. Du fait que tous ces efforts, répartis sur la section transversale, représentent un système équivalent à un couple, leur résultante suivant x est nulle, d'où

$$\int \frac{Ey}{r}\mathrm{d}A = \frac{E}{r}\int y\mathrm{d}A = 0,$$

c'est-à-dire que le moment de l'aire de la section, par rapport à l'axe neutre, est nul. Par suite, *l'axe neutre passe par le centre de gravité ae la section.*

Le moment de l'effort s'exerçant sur dA, par rapport à l'axe neutre, est $(Ey/r)dA \cdot y$. Sommons tous ces moments appliqués sur la section transversale et égalons leur résultante au moment M des efforts extérieurs, on obtient l'équation permettant de déterminer le rayon de courbure r :

$$\int \frac{E}{r} y^2 dA = \frac{EI_z}{r} = M \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{r} = \frac{M}{EI_z}, \tag{56}$$

dans laquelle

$$I_z = \int y^2 dA$$

est le *moment d'inertie* de la section par rapport à l'axe neutre z (voir Appendice, p. 397). D'après (56) on conclut que la courbure varie directement avec le moment fléchissant et inversement par rapport à EI_z, appelé *rigidité à la flexion* de la poutre. En éliminant r des équations (55) et (56) on obtient l'équation des contraintes :

$$\sigma_x = \frac{My}{I_z}. \tag{57}$$

Dans cette équation M est positif lorsqu'il produit une flexion de la poutre convexe vers le bas (voir fig. 82) ; y est positif vers le bas.

L'étude précédente s'appliquait au cas d'une section rectangulaire. Elle est aussi valable pour les barres de section transversale quelconque, mais possédant un plan de symétrie longitudinal et fléchies par des couples d'extrémités s'exerçant dans ce plan. Dans ce cas la flexion s'opère dans le plan des couples et les plans de sections transversales demeurent plans et normaux aux fibres longitudinales après la flexion.

Les contraintes maximums de traction et de compression se développent dans les fibres extrêmes, et, pour une section rectangulaire ou toute autre section dont le centre de gravité se trouve au milieu de l'épaisseur h, elles prennent naissance aux points $y = \pm h/2$. Pour M positif, nous obtenons

$$(\sigma_x)_{max} = \frac{Mh}{2I_z} \qquad \text{et} \qquad (\sigma_x)_{min} = -\frac{Mh}{2I_z}. \tag{58}$$

Nous posons, pour simplifier,

$$Z = \frac{2I_z}{h}. \tag{59}$$

D'où

$$(\sigma_x)_{max} = \frac{M}{Z}, \qquad (\sigma_x)_{min} = -\frac{M}{Z}. \tag{60}$$

La quantité Z s'appelle *module de section* ou *module d'inertie*. Dans le cas de section transversale rectangulaire (fig. 82*b*) nous avons :

$$I_z = \frac{bh^3}{12}, \qquad Z = \frac{bh^2}{6}.$$

Pour une section circulaire de diamètre d,

$$I_z = \frac{\pi d^4}{64}, \qquad Z = \frac{\pi d^3}{32}.$$

Pour les sections à profils divers, d'usage commercial, tels les profilés ⌶, I, ⊔, etc., il existe des catalogues donnant les valeurs de I_z et Z correspondant aux dimensions utilisées. Nous donnons en appendice des tableaux résumés de ce genre de profilés.

Lorsque le centre de gravité de la section ne se situe pas au milieu de l'épaisseur, comme dans le cas d'une poutre en T, on désigne respectivement par h_1 et h_2 les distances séparant l'axe neutre des fibres extrêmes inférieure et supérieure. Par suite, dans le cas d'un moment fléchissant positif nous avons :

$$(\sigma_x)_{max} = \frac{Mh_1}{I_z}, \qquad (\sigma_x)_{min} = -\frac{Mh_2}{I_z}. \tag{61}$$

et pour un moment fléchissant négatif :

$$(\sigma_x)_{max} = -\frac{Mh_2}{I_z}, \qquad (\sigma_x)_{min} = \frac{Mh_1}{I_z}. \tag{62}$$

Problèmes

1. Déterminer la contrainte maximum dans un essieu de locomotive (fig. 84), sachant que $c = 35$ cm, que le diamètre d de l'essieu est égal à 25 cm, et que la charge P transmise par la suspension est de 120 kN par fusée.

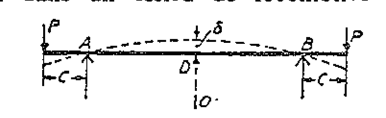


Fig. 84.

Solution. Le moment fléchissant sur le milieu de l'essieu est

$$M = Pc = 120\,000 \times 0{,}35 = 42\,000 \text{ m} \cdot \text{N}.$$

La contrainte maximum, d'après (60), est

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{Z} = \frac{32\,M}{\pi d^3} = \frac{32 \times 12\,000 \times 0{,}35}{\pi \times 0{,}25^3} = 254 \text{ bars}.$$

2. Déterminer le rayon de courbure r et la flèche de l'essieu du problème précédent. L'essieu est en acier et la distance $AB = 1{,}50$ m.

Solution. Le rayon de courbure r s'obtient par l'équation (55) en substituant $d/2 = 12{,}5$ cm à y, $(\sigma_x)_{\max} = 254$ bars. Doù

$$r = \frac{E}{\sigma} \cdot \frac{d}{2} = \frac{21 \times 10^5 \times 12{,}5}{254} = 103\,346 \text{ cm}.$$

Pour calculer δ (fig. 84), on remarque que la ligne élastique est un arc de cercle de rayon r et $\overline{DB}$ est l'un des côtés du triangles DOB, où O représente le centre de courbure. Donc

$$\overline{DB^2} = r^2 - (r-\delta)^2 = 2\,r\delta - \delta^2 \,;$$

δ est très petit en comparaison de r, et l'on peut, a fortiori, négliger δ^2 dans l'équation ci-dessus. D'où

$$\delta = \frac{\overline{DB^2}}{2\,r} = \frac{150^2}{8 \times 103\,346} = 0{,}027 \text{ cm}.$$

3. Une poutre en bois de section transversale carrée $25{,}4 \times 25{,}4$ cm, en appui sur A et B (fig. 84), supporte en ses extrémités des charges P. Déterminer P et la flèche δ à mi-portée, sachant que $AB = 1{,}80$ m, $c = 0{,}30$ m, $(\sigma_x)_{\max} = 70{,}31$ bars et $E = 1{,}05 \times 10^5$ bars. On néglige le poids de la poutre. Construire les diagrammes du moment fléchissant et de l'effort tranchant.

Réponse. $P = 6\,305$ daN ; $\delta = 0{,}219$ cm.

4. Une poutrelle standard de 75 cm repose sur deux appuis (voir fig. 85) ; elle est sollicitée, sur les porte-à-faux, par une charge uniformément répartie de 150 kN/m. Déterminer la contrainte maximum dans le tronçon central de la poutre et la flèche à mi-portée, sachant que $I_z = 242\,600$ cm⁴.

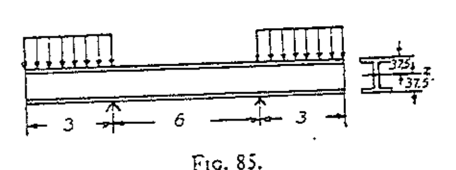


FIG. 85.

Solution. Le moment fléchissant du tronçon central est

$$M = 150\,000 \times 3 \times 1{,}5 = 675\,000 \text{ m} \cdot \text{N}.$$

$$(\sigma_x)_{\max} = \frac{675\,000 \times 0{,}375}{24{,}26 \times 10} = 9{,}74 \text{ hectobars},$$

$$\delta = 0{,}6 \text{ cm}.$$

5. Déterminer la contrainte maximum produite dans un fil d'acier de diamètre $d = 0{,}08$ cm lorsqu'il est enroulé sur une poulie dont le diamètre est $D = 50$ cm.

Solution. L'équation (52) nous donne l'allongement dû à la flexion.

$$\varepsilon = \frac{d}{D+d} \approx \frac{0{,}08}{50} = 0{,}001\,6$$

et la contrainte de traction correspondante est

$$(\sigma_x)_{\max} = \varepsilon E = 0{,}001\,6 \times 21 \times 10^5 = 3\,360 \text{ bars}.$$

6. Une règle d'acier de section transversale $0{,}08 \times 2{,}50$ cm et de longueur $l = 25{,}0$ cm est fléchie, par des couples appliqués à ses extrémités, suivant un arc de cercle de 60°. Déterminer la contrainte maximum et la flèche.

Solution. On détermine le rayon de courbure r par l'équation $l = 2\pi r/6$, d'où $r = 23{,}9$ cm, et la contrainte maximum s'obtient à l'aide de (55),

$$(\sigma_x)_{\max} = \frac{E \times 0{,}04}{r} = \frac{21 \times 10^5 \times 0{,}04}{23{,}9} = 35{,}2 \text{ hectobars}.$$

La flèche, calculée pour un arc circulaire, est

$$\delta = r\,(1 - \cos 30°) = 3{,}2 \text{ cm}.$$

7. Déterminer la contrainte maximum et la valeur des couples appliqués aux extrémités de la règle du problème précédent, sachant que la flèche maximum, au milieu, est 2,50 cm.

Réponse. $(\sigma_x)_{\max} = 2\,688$ bars, $M = 71{,}68$ mm · daN.

8. Déterminer la courbure produite dans une poutre d'acier rectangulaire par un échauffement non uniforme à travers l'épaisseur h de la section. La température, en un point quelconque situé à la distance y du plan moyen xz de la poutre (fig. 82), est donnée par l'équation :

$$t = \frac{t_1 + t_0}{2} + \frac{(t_1 - t_0)\,y}{h},$$

où t_1 représente la température de la partie inférieure de la poutre, t_0 celle de la partie supérieure, $t_1 - t_0 = 50{,}5$ °C et le coefficient de dilatation $\alpha_x = 12 \times 10^{-6}$. Quelles sont les contraintes produites dans le cas d'extrémités encastrées ?

Solution. La température du plan moyen xz est égale à la constante $(t_1 + t_0)/2$, et la variation de température des autres fibres est proportionnelle à y. Les dilatations unitaires correspondantes sont aussi proportionnelles à y, c'est-à-dire, elles sont soumises à la même loi, donnée par (52), que les allongements unitaires. En raison de cette dilatation non uniforme des fibres

la poutre s'incurve et le rayon de courbure r se calcule à l'aide de (52), en y remplaçant ε_x par $\alpha_s(t_1-t_0)/2$ et y par $h/2$. D'où

$$r = \frac{h}{\alpha_s(t_1-t_0)} = 1\,190\,h\,.$$

Lorsque les extrémités de la poutre sont encastrées, elles sont le siège de couples de réaction M qui s'opposent à la courbure due à l'échauffement non uniforme. Par suite,

$$M = \frac{EI_z}{r} = \frac{EI_z}{1\,190\,h}\,.$$

Substituons cette valeur de M dans (57), il vient

$$\sigma_x = \frac{Ey}{1\,190\,h}\,,$$

et la contrainte maximum est

$$(\sigma_x)_{\max} = \frac{E}{2\times 1\,190} = 884 \text{ bars}\,.$$

9. Résoudre les problèmes 6 et 7 dans le cas où la règle est en cuivre et sa courbure un arc de 10°.

10. Résoudre le problème 4 en supposant que la poutrelle est en bois, que sa section a pour dimensions 30×30 cm et que l'intensité de la charge est 1 500 daN. Construire les diagrammes du moment fléchissant et de l'effort tranchant.

24. Différentes formes de sections des poutres [2]

On déduit de l'étude du paragraphe précédent que les contraintes de traction et de compression maximums, dans une poutre en flexion pure, sont proportionnelles aux distances des fibres les plus éloignées de l'axe neutre de la section transversale. Donc, si le matériau a même résistance en traction et en compression, il est logique de choisir une section dont le centre de gravité se situe au milieu de l'épaisseur de la poutre. On obtient ainsi un même coefficient de sécurité des fibres en traction et en compression. C'est là l'idée de base dans le choix des sections symétriques par rapport à l'axe neutre des matériaux qui ont, comme l'acier de construction, même limite élastique en traction et en compression. Si la section

([2]) BARRÉ DE SAINT-VENANT donne une étude très complète des différentes formes de section des poutres dans ses notes concernant l'ouvrage de NAVIER, *Résistance des corps solides*, 3e éd., pp. 128-162, 1864.

n'est pas symétrique par rapport à l'axe neutre, c'est le cas d'un profil de rail, on répartit la matière entre la tête et la base de manière à ramener le centre de gravité au milieu de la hauteur.

Pour un matériau à faible résistance en traction et à très grande résistance en compression, par exemple la fonte ou le béton, la forme adéquate de la section devra être telle que les distances h_1 et h_2 de l'axe neutre aux fibres extrêmes, en traction et en compression, soient dans le même rapport que les résistances du matériau en traction et en compression. On réalise ainsi un équilibre de la résistance en traction et en compression. Dans un profil T, par exemple, on placera le centre de gravité de la section dans une position déterminée le long de la hauteur, en proportionnant convenablement les dimensions de l'âme et de l'aile.

Pour un moment fléchissant donné la contrainte maximum dépend du module de section et il est intéressant de remarquer que dans certains cas l'augmentation de l'aire de la section ne diminue en rien la valeur de cette contrainte. Par exemple, une barre à section transversale carrée, soumise à des couples s'exerçant dans le plan vertical passant par une diagonale de la section (fig. 86), verra diminuer sa contrainte maximum si l'on découpe les angles hachurés sur la figure. Soit a la longueur du côté de la section carrée, le moment d'inertie du carré, par rapport à l'axe z, est (voir Appendice) $I_z = a^4/12$ et son module est

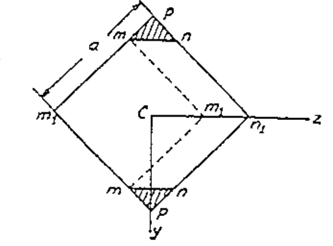


FIG. 86.

$$Z = \frac{I_z\sqrt{2}}{a} = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3\,.$$

Découpons alors les angles de façon que $\overline{mp} = \alpha a$, où α représente un coefficient que l'on déterminera plus tard. La nouvelle section se compose d'un carré mm_1mm_1 de côté $a(1-\alpha)$ et de deux parallélogrammes mnn_1m_1. Le moment d'inertie, par rapport à z, de cette nouvelle section est

$$I_z' = \frac{a^4(1-\alpha)^4}{12} + 2\cdot\frac{\alpha a\sqrt{2}}{3}\left[\frac{a(1-\alpha)}{\sqrt{2}}\right]^3 = \frac{a^4(1-\alpha)^3}{12}(1+3\alpha)\,,$$

son module correspondant est

$$Z' = \frac{I_z'\sqrt{2}}{a(1-\alpha)} = \frac{\sqrt{2}}{12}\cdot a^3(1-\alpha)^2(1+3\alpha)\,.$$

Si nous cherchons la valeur de α qui rend maximum le module de section, nous trouvons $\alpha = 1/9$. Utilisons cette valeur de α dans Z', on constate que la contrainte de flexion maximum diminue approximativement de 5 pour cent lorsque nous supprimons les coins.

Ce résultat se conçoit aisément une fois que l'on s'aperçoit que le module de section est le quotient du moment d'inertie par la mi-hauteur de la section. En supprimant les angles le moment d'inertie de la section diminue dans une proportion plus faible que la hauteur, par suite le module de la section augmente et $(\sigma_x)_{max}$ décroît. Un effet analogue se produit dans d'autres cas. Si nous considérons un rectangle à saillies étroites (fig. 87*a*) on augmente le module de section, sous certaines conditions, en coupant ces protubérances. Dans le cas d'une section circulaire (fig. 87*b*), on augmente son module de 0,7 pour cent en retirant les deux segments hachurés dont la hauteur est $\delta = 0{,}011\ d$. Pour une section triangulaire (fig. 87*c*), on accroît son module en coupant le sommet hachuré.

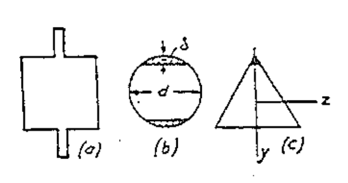


Fig. 87.

En réalisant le calcul d'une poutre subissant la flexion pure, il faudra non seulement satisfaire aux conditions de résistance mais aussi à la condition d'économie sur le poids de la poutre même. De deux profils ayant même module de section, c'est-à-dire satisfaisant à la condition de résistance avec le même coefficient de sécurité, le plus économique sera celui qui aura la plus petite aire de section. Dans l'étude comparative des différentes formes de sections, commençons par le rectangle de hauteur h et de largeur b. Le module de la section est

$$Z = \frac{bh^2}{6} = \frac{1}{6} Ah, \qquad (a)$$

où A représente l'aire de section droite. On remarque que l'économie réalisée avec une section rectangulaire augmente avec sa hauteur h. Toutefois, il existe une limite à cet accroissement, le problème de la stabilité de la poutre surgit avec l'étroitesse de sa section. Le fléchissement d'une poutre de section rectangulaire très étroite peut être provoqué par un flambement latéral (voir 2ᵉ partie) plutôt que par un dépassement de la résistance du matériau.

Dans le cas d'une section circulaire, nous avons

$$Z = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{1}{8} A \cdot d. \qquad (b)$$

Comparons des sections circulaire et carrée de même aire, on trouve que le côté h du carré est égal à $d\sqrt{\pi}/2$, l'équation (a) donne alors

$$Z = 0{,}147\ A \cdot d.$$

On remarque qu'il est plus économique d'utiliser une section carrée qu'une section circulaire.

Si l'on considère la répartition des contraintes à travers l'épaisseur de la section (fig. 83), nous sommes amenés à conclure, pour un projet économique, qu'il faut rejeter le maximum de matière le plus loin possible de l'axe neutre. Pour une poutre de section A et d'épaisseur h la solution la plus favorable consiste à répartir chaque moitié de l'aire à la distance $h/2$ de l'axe neutre. D'où

$$I_z = 2 \times \tfrac{1}{2} A \times (\tfrac{1}{2} h)^2 = \tfrac{1}{4} Ah^2, \qquad Z = \tfrac{1}{2} Ah. \qquad (c)$$

C'est vers cette limite que l'on peut tendre, en pratique, en utilisant une section I ou ⊥ dans laquelle une grande partie de la matière est concentrée dans les ailes. Mais, comme il est évidemment nécessaire de garnir l'âme de la poutre, on ne peut jamais satisfaire à la condition limite (c), et pour des profils ⊥ normalisés nous avons approximativement

$$Z \approx 0{,}35\ Ah. \qquad (d)$$

La comparaison de (d) et (a) montre que le profil ⊥ est bien plus économique qu'une section rectangulaire de même hauteur. En raison de la largeur de ses ailes la poutre ⊥ est moins sujette au flambement latéral qu'une poutre à profil rectangulaire de même hauteur et même module de section. Cette brève étude explique l'usage important des poutres ⊥ dans les constructions en acier.

Problèmes

1. Déterminer la largeur x des ailes d'une poutre en fonte, dont le profil est celui indiqué sur la figure 88, de manière que la contrainte de traction maximum soit 1/3 de la contrainte de compression maximum. La hauteur de la poutre h est 10 cm, l'épaisseur de l'âme et des ailes est $t = 2{,}5$ cm.

Solution. Pour satisfaire aux conditions du problème il est nécessaire que la distance c, du centre de gravité de la poutre au bord inférieur extrême, soit égale à $\frac{1}{4}\ h$.

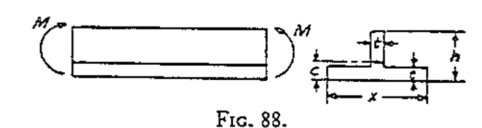


Fig. 88.

Se référant à la figure 88, nous obtenons alors

$$c = \frac{ht\cdot\frac{h}{2}+(x-t)\frac{t^2}{2}}{ht+(x-t)t} = \frac{h}{4},$$

d'où

$$x = t+\frac{h^2}{h-2t} = 2{,}5+\frac{100}{5} = 22{,}5 \text{ cm}.$$

2. Déterminer le rapport $(\sigma_z)_{max} : (\sigma_z)_{min}$ dans le cas du profilé ⊔ de la figure 89, sachant que $t = 5$ cm, $h = 25$ cm, $b = 60$ cm.

Réponse. $(\sigma_z)_{max} : (\sigma_z)_{min} = 3/-7$.

Fig. 89.

3. Déterminer la condition pour laquelle toute diminution de la hauteur h du profil de la figure 90 entraîne un accroissement de son module.

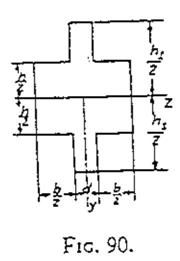


Fig. 90.

Solution.

$$Z = \frac{bh^3}{6h_1}+\frac{dh_1^2}{6}.$$

$$\frac{dZ}{dh_1} = -\frac{bh^3}{6h_1^2}+\frac{dh_1}{3}.$$

Pour que Z augmente lorsque h_1 décroît, il faut

$$\frac{bh^3}{6h_1^2} > \frac{dh_1}{3} \quad \text{ou} \quad \frac{b}{2d} > \frac{h_1^3}{h^3}.$$

4. Déterminer quelle surface d'un triangle équilatéral (fig. 87*c*) il faut sectionner pour obtenir un module Z maximum.

5. Déterminer le rapport des poids de trois poutres de même longueur soumise aux mêmes M et $(\sigma_z)_{max}$ et dont les sections sont respectivement un cercle, un carré et un rectangle de dimensions $h = 2b$.

Réponse. 1,12 : 1 : 0,793.

6. Etablir une comparaison entre les modules de section de deux poutres de même poids sachant que la première est une poutre pleine circulaire de diamètre d et la seconde un tube circulaire de diamètre extérieur D et diamètre intérieur D_1.

Solution. L'aire de la section des deux poutres est

$$A = \pi d^2/4 = \pi(D^2-D_1^2)/4.$$

Pour la poutre pleine $Z = Ad/8$, pour la poutre tubulaire

$$Z_1 = \frac{\pi(D^4-D_1^4)}{32D} = \frac{AD}{8}\left(1+\frac{D_1^2}{D^2}\right).$$

Remarquons que $D_1^2 = D^2-4A/\pi$, on trouve pour la poutre tubulaire

$$Z_1 = \frac{AD}{8}\left(2-\frac{4A}{\pi D^2}\right),$$

si bien que

$$\frac{Z_1}{Z} = \frac{D}{d}\left(2-\frac{4A}{\pi D^2}\right).$$

Donc, dans le cas de tubes très épais D tend vers d et Z_1 vers Z. Pour des tubes très minces D est très grand par rapport à d et le rapport Z_1/Z tend vers $2D/d$.

25. Cas général des poutres symétriques chargées transversalement

Dans le cas général des poutres sollicitées transversalement dans un plan de symétrie, les contraintes réparties sur une section de poutre équilibrent l'effort tranchant et le moment fléchissant en cette section. On établit généralement le calcul des contraintes en deux étapes : on détermine d'abord les contraintes dues au moment fléchissant, appelées *contraintes de flexion*, et ensuite les *contraintes de cisaillement* produites par l'effort tranchant. Dans le présent paragraphe nous limiterons notre étude au calcul des contraintes de flexion, on développera l'analyse des contraintes de cisaillement au paragraphe 26.

Pour calculer les contraintes de flexion on suppose que celles-ci sont distribuées comme dans le cas de la flexion pure et les formules des contraintes du paragraphe 23 sont encore valables (on donne, dans la deuxième partie, une étude plus complète sur les contraintes au voisinage des points d'application des forces concentrées).

Le calcul des contraintes de flexion s'effectue habituellement pour les sections où le moment fléchissant atteint sa valeur maximum positive ou négative. Connaissant le moment fléchissant maximum et la valeur de la contrainte de flexion admissible σ_W on peut alors obtenir les dimensions nécessaires de la section d'une poutre par l'équation :

$$\sigma_W = \frac{M_{max}}{Z}. \qquad (63)$$

Les différents problèmes ci-dessous montrent comment s'applique cette équation.

Problèmes

1. Déterminer les dimensions nécessaires d'une poutre standard I de façon qu'elle supporte une charge répartie de 600 daN/m (voir fig. 91), sachant que la contrainte d'utilisation est $\sigma_W = 1\,200$ bars. On ne tiendra compte que des contraintes normales σ_x et l'on négligera le poids de la poutre.

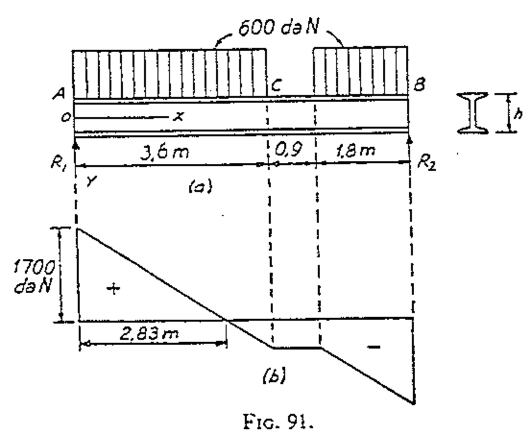


FIG. 91.

Solution. Pour obtenir la section du moment maximum on construit le diagramme de l'effort tranchant (fig. 91*b*). La réaction d'appui à gauche est

$$R_1 = \frac{600 \times 3{,}6 + 600 \times 1{,}8 \times 0{,}9}{6{,}3} = 1\,700 \text{ daN}.$$

L'effort tranchant, pour une section quelconque du tronçon AC de la poutre, est

$$V = R_1 - qx = 1\,700 - 600\,x.$$

Cet effort est nul pour $x = 1\,700/600 = 2{,}83$ m. Dans cette section le moment fléchissant maximum est

$$M_{max} = 1\,700 \times 2{,}83 - 600 \times \tfrac{1}{2} \times 2{,}83^2 = 2\,400 \text{ m} \cdot \text{daN}.$$

Le module de section nécessaire (éq. 63) est alors

$$Z \geqslant \frac{240\,000}{1\,200} = 200 \text{ cm}^3.$$

Cette condition est satisfaite pour une poutre IPN de 200 mm de hauteur, avec $Z = 214$ cm³ (voir Appendice).

2. Une digue en bois (fig. 92) est composée de poutres verticales, identiques à AB, de section rectangulaire et d'épaisseur $h = 0{,}30$ m. Ces poutres

sont en appui sur leurs extrémités et leur longueur est $l = 5{,}40$ m. Déterminer $(\sigma_x)_{max}$; on néglige le poids des poutres.

Solution. Soit b la largeur d'une poutre, la pression hydrostatique totale sur la poutre, représentée par le prisme triangulaire ABC, est $W = \frac{1}{2}\, bl^2 \times 10$ kN, la réaction en A est $R_1 = \frac{1}{3}\, W = \frac{1}{6}\, bl^2 \times 10$ kN et l'effort tranchant sur une section quelconque mn est égal à la réaction R_1 moins le poids du prisme d'eau Amn, c'est-à-dire,

$$V = R_1 - W\frac{x^2}{l^2} = W\left(\frac{1}{3} - \frac{x^2}{l^2}\right).$$

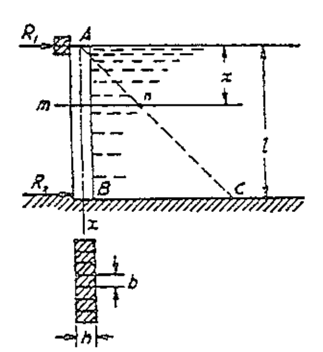


FIG. 92.

On détermine la section correspondant à M_{max} par la condition $V = 0$ ou

$$\frac{1}{3} - \frac{x^2}{l^2} = 0,$$

d'où l'on tire

$$x = \frac{l}{\sqrt{3}} = 3{,}12 \text{ m}.$$

Le moment fléchissant d'une section mn quelconque est égal au moment de la réaction R_1 diminué du moment de la charge répartie, représentée par le prisme triangulaire Amn. Par suite,

$$M = R_1 x - \frac{Wx^2}{l^2} \cdot \frac{x}{3} = \frac{Wx}{3}\left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right).$$

Substituons, dans cette équation, $\frac{1}{3}$ à x^2/l^2 et 3,12 m à x, nous obtenons

$$M_{max} = \tfrac{1}{9}\, bl^2 \times 1\,000 \times 3{,}12,$$

$$(\sigma_x)_{max} = \frac{M_{max}}{Z} = \frac{6\,M_{max}}{bh^2} = \frac{2}{3}\left(\frac{l}{h}\right)^2 1\,000 \times 3{,}12 = 67{,}39 \text{ bars}.$$

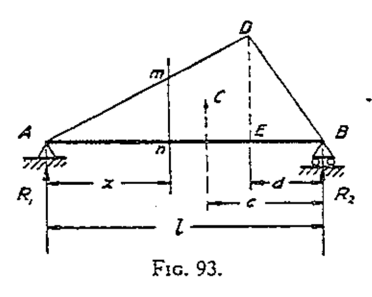


FIG. 93.

3. Déterminer la valeur de M_{max} d'une poutre sollicitée par une charge triangulaire ADB égale à $W = 50$ kN, sachant que $l = 4$ m et $d = 1$ m (fig. 93).

Solution. La distance c séparant la verticale, passant par le centre de gravité C, de l'appui B est, dans le cas du triangle,

$$c = \tfrac{1}{3}\,(l + d) = \tfrac{5}{3} \text{ m}.$$

La réaction d'appui A est alors

$$R_1 = \frac{Wc}{l} = \frac{5\,000 \times 5}{4 \times 3} = 2\,083 \text{ daN}.$$

L'effort tranchant, dans une section mn quelconque, est égal à la réaction R_1 moins le poids de la charge représentée par l'aire Amn. Puisque la charge figurée par l'aire ADE est

$$\frac{W(l-d)}{l} = \frac{3}{4}W,$$

nous obtenons

$$V = R_1 - \frac{3}{4}W\frac{x^2}{(l-d)^2}.$$

On détermine la position de la section à moment fléchissant maximum d'après la condition

$$R_1 - \frac{3}{4}W\frac{x^2}{(l-d)^2} = 0$$

ou

$$\frac{x^2}{(l-d)^2} = \frac{4R_1}{3W} = \frac{5}{9},$$

finalement

$$x = 2{,}236 \text{ m}.$$

Le moment fléchissant d'une section quelconque mn est égal au moment de la réaction R_1 moins le moment de la charge Amn. Soit

$$M = R_1 x - \frac{3}{4}W\frac{x^2}{(l-d)^2}\cdot\frac{x}{3}.$$

Remplaçons x par 2,236 m, nous obtenons

$$M_{max} = 3\,105 \text{ m} \cdot \text{daN}.$$

4. Construire les diagrammes du moment fléchissant et de l'effort tranchant de la poutre de la figure 94*a*, et déterminer les dimensions de la poutre I capable de supporter les charges $P = 10$ kN, $q = 600$ daN/m, sachant que $a = c = l/4 = 2$ m, $\sigma_w = 1\,000$ bars. On néglige le poids de la poutre.

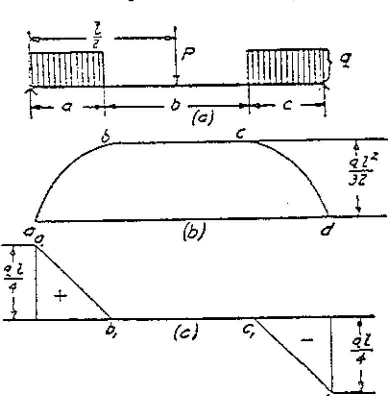


Fig. 94.

Solution. Les figures 94*b* et 94*c* donnent les diagrammes du moment fléchissant et de l'effort tranchant produits par les charges réparties. On doit leur ajouter le moment et l'effort tranchant dus à P. Le moment fléchissant maximum surgit à mi-portée et sa valeur est

$$M_{max} = \frac{ql^2}{32} + \frac{Pl}{4} = 3\,200 \text{ m} \cdot \text{daN}.$$

Le module de section nécessaire est $Z = 320$ cm³. La poutre standard IPN choisie, de hauteur = 240 mm et de section 46,1 cm² donnant $Z = 354$ cm³, est celle qui se rapproche le plus des conditions requises (voir Appendice).

5. Déterminer la position la plus défavorable d'un chariot de grue qui se déplace sur la poutre de la figure 95. Trouver M_{max} sachant que la charge sur chaque roue est $P = 50$ kN, $l = 7$ m, $d = 1{,}75$ m. On ne tient pas compte du poids de la poutre.

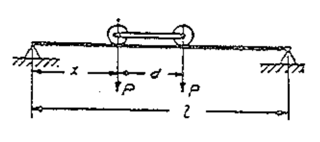


Fig. 95.

Solution. Si x est la distance entre la roue gauche et l'appui gauche de la poutre le moment fléchissant au droit de cette roue est

$$\frac{2P(l - x - \frac{1}{2}d)x}{l}.$$

Le moment est maximum lorsque

$$x = \frac{l}{2} - \frac{d}{4}.$$

Par suite, pour obtenir le moment fléchissant maximum sous la roue gauche, on déplace le chariot, de sa position moyenne, d'une longueur $d/4$ vers l'appui droit. On obtiendra même valeur du moment fléchissant sous la roue droite en déplaçant le chariot de $d/4$, à partir du centre vers l'appui gauche :

$$M_{max} = \frac{2P(l/2 - d/4)^2}{l} = 13\,377 \text{ m} \cdot \text{daN}.$$

6. Les rails de la grue (fig. 96) sont en appui sur deux poutres I. Déterminer la position la plus défavorable de la grue, le moment M_{max} correspondant et les dimensions des poutres I. sachant que $\sigma_w = 1\,054{,}6$ bars. $l = 9{,}14$ m, $a = 3{,}66$ m, $d = 1{,}83$ m, le poids de la grue est $W = 4\,536$ daN

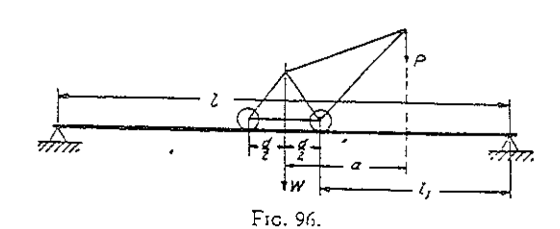


Fig. 96.

et le poids soulevé par celle-ci $P = 907$ daN. Les charges s'exercent dans le plan moyen entre les deux poutres I et sont également réparties entre elles.

Solution. Le moment fléchissant maximum prend naissance sous la roue droite lorsque sa distance à l'appui droit est égale à $l = \frac{1}{2}(l - \frac{1}{6}d)$;

$M_{max} = 1\,163$ m N. Divisons également le moment entre les deux poutres nous trouvons le module de section nécessaire

$$Z = \frac{M_{max}}{2\,\sigma_W} = 551{,}3 \text{ cm}^3 .$$

La poutre I à utiliser est une IPN, sa hauteur est 30 cm, sa section est égale à 69,1 cm², $Z = 653$ cm³. Le poids de la poutre est négligé.

7. Une poutre circulaire en bois appuyée sur C et encastrée dans la fondation au point A (fig. 97) supporte une charge $q = 446{,}5$ daN/m uniformément répartie sur BC. Construire le diagramme du moment fléchissant et déterminer le diamètre nécessaire d, sachant que $\sigma_W = 84{,}4$ bars, $a = 0{,}92$ m, $b = 1{,}84$ m.

Solution. Le diagramme du moment fléchissant est représenté sur la figure 97*b*. La plus grande valeur numérique du moment se situe en C et est égale à 7 466 m · N. Par suite, d'après l'équation (63),

$$d = \sqrt[3]{\frac{32}{\pi} \cdot \frac{M}{\sigma_W}} = 20{,}8 \text{ cm} .$$

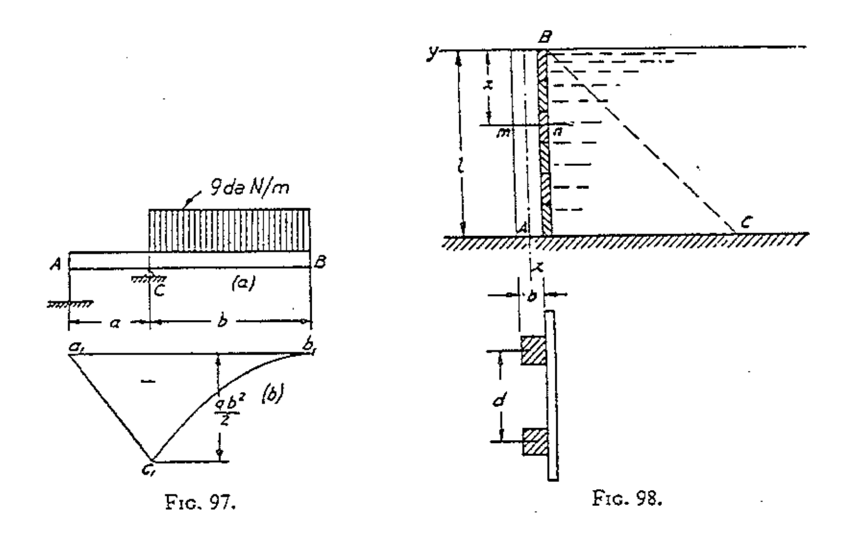


Fig. 97.

Fig. 98.

8. Une digue en bois se compose d'un platelage en planches horizontales étayées par des piles verticales encastrées à leur base (fig. 98). Déterminer les dimensions de la section carrée des piles, sachant que $l = 1{,}80$ m, $d = 0{,}90$ m et $\sigma_W = 35$ bars. Construire les diagrammes du moment fléchissant et de l'effort tranchant.

Solution. La charge totale, transversale, sur une pile est représentée par le poids W du prisme d'eau triangulaire ABC. Pour une section quelconque mn, l'effort tranchant et le moment fléchissant sont :

$$V = -\frac{Wx^2}{l^2}, \qquad M = -\frac{Wx^2}{l^2} \cdot \frac{x}{3} .$$

Pour déterminer les signes de V et M on suppose que la figure 98 tourne de 90° dans le sens inverse des aiguilles d'une montre de manière à faire coïncider les axes x et y avec les axes correspondants de la figure 61. On détermine la dimension b nécessaire à l'aide de (63),

$$Z = \frac{b^3}{6} = \frac{M_{max}}{\sigma_W} ,$$

d'où

$$b = 251 \text{ mm} .$$

Nous laissons au lecteur le soin de réaliser les diagrammes.

9. Déterminer les dimensions nécessaires d'une poutre I en porte-à-faux qui supporte une charge uniforme $q = 3$ kN/m et une charge concentrée $P = 225$ daN à son extrémité. Sa longueur est $l = 1{,}5$ m et $\sigma_W = 10$ hectobars.

Réponse. $Z = \dfrac{225 \times 150 + 300 \times 1{,}50 \times 75}{1\,000} = 67{,}5 \text{ cm}^3 .$

La poutre I à utiliser est une IPN de 140 mm de hauteur et 18,3 cm² de section (voir Appendice).

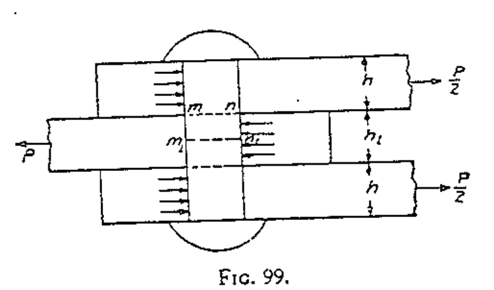


Fig. 99.

10. Déterminer les contraintes de flexion dans un rivet en supposant que les charges s'exerçant sur lui sont réparties comme l'indique la figure 99. Le diamètre du rivet est $d = 18$ mm, $h = 6$ mm, $h_1 = 10$ mm, $P = 45$ kN.

Solution. Le moment fléchissant de la section mn est $P/2 \times h/2$. Le moment fléchissant de la section moyenne est

$$\frac{P}{2}\left(\frac{h}{2} + \frac{h_1}{4}\right).$$

Ce dernier est le moment maximum et il est le seul que l'on prend en considération pour calculer les contraintes. Par suite

$$(\sigma_x)_{max} = \frac{P}{2}\left(\frac{h}{2} + \frac{h_1}{4}\right) : \frac{\pi d^3}{32} = \frac{4P}{\pi d^2} \cdot \frac{2h+h_1}{d} = 21{,}6 \text{ hectobars}.$$

11. Déterminer les modules de section Z_1, Z_2, Z_3 des poutres I nécessaires dans les cas des figures 72*a*, 72*b*, 72*c*, en supposant la contrainte d'utilisation égale à 1 125 bars.

Réponse. $Z_1 = 117$ cm³, $Z_2 = 214$ cm³, $Z_3 = 442$ cm³.

12. Déterminer le module de section Z et les dimensions nécessaires d'une poutre en appui simple de profil I, capable de supporter une charge uniforme de 595,3 daN/m et une charge concentrée $P = 1\,814$ daN placée au milieu. La longueur de la poutre est 4,60 m, la contrainte d'utilisation $\sigma_{u} = 1\,125$ bars.

Réponse. $Z = 323$ cm³.

13. Un profilé ⊏ dont la section est représentée sur la figure 89 est en appui simple sur ses extrémités, il supporte en son milieu une charge concentrée P. Calculer la valeur maximum de la charge que la poutre peut subir, sachant que la contrainte d'utilisation est égale à 70 bars en traction et 140 bars en compression, $t = 5$ cm, $h = 25$ cm, $b = 60$ cm et la longueur $l = 3$ m.

Réponse. $P = 28{,}8$ kN.

26. Contraintes de cisaillement dans le cas de la flexion

Nous avons vu, au paragraphe précédent, que lorsqu'une poutre est fléchie par des charges transversales, il se crée des contraintes normales σ_x et aussi des contraintes de cisaillement τ dans toute section mn de la poutre (voir fig. 100).

Considérons l'action du tronçon droit de la poutre (fig. 100), on conclut, d'après les conditions d'équilibre, que la somme de ces contraintes de

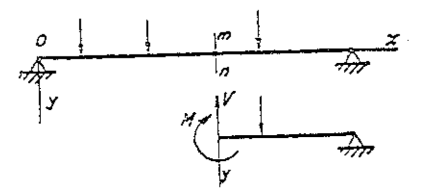


FIG. 100.

cisaillement forme l'effort tranchant V. Commençons, pour établir la loi de distribution de ces contraintes de cisaillement sur l'aire de la section, par le cas simple d'une section rectangulaire $mmnn$ (fig. 101). Dans ce cas, il est logique de supposer que la contrainte de cisaillement en chaque point de la section est parallèle à l'effort tranchant V, c'est-à-dire parallèle aux côtés mn de la section. On représente dans ce cas la contrainte par τ_{xy}. L'indice y de τ_{xy} indique que la contrainte de cisaillement est parallèle à l'axe y, et l'indice x que la contrainte agit dans un plan perpendiculaire à l'axe x. On suppose encore que la répartition des contraintes de cisaillement est uniforme à travers la largeur cc_1 de la poutre. Ces deux hypothèses nous permettent de déterminer complètement la répartition des contraintes de cisaillement. Une étude plus élaborée du problème montre que la solution approchée, ainsi obtenue, est en général suffisamment exacte et que pour un rectangle étroit (h grand par rapport à b, fig. 103) elle coïncide pratiquement avec la solution exacte (³).

Considérons un élément, tel $acdea_1c_1d_1e_1$ de la figure 101*b*, découpé dans la poutre par deux sections voisines et par deux plans voisins,

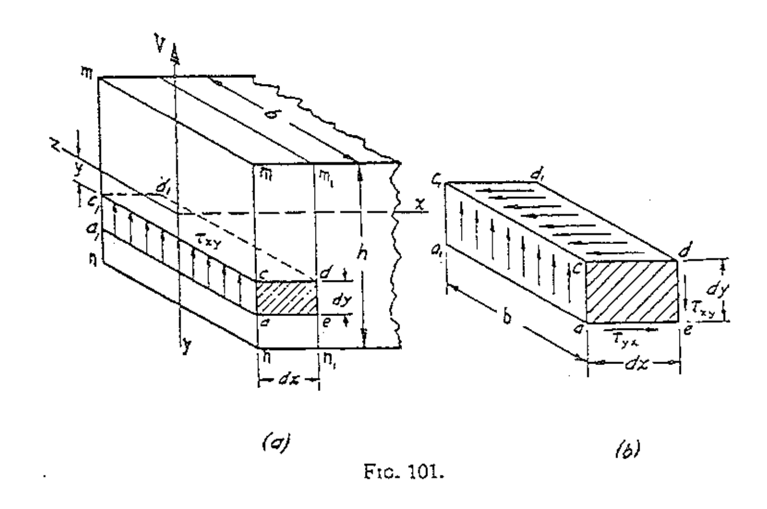


FIG. 101.

(³) La solution exacte de ce problème est due à SAINT-VENANT, *J. math.*, Liouville, 1856. On trouve un compte rendu de l'important ouvrage de SAINT-VENANT dans *History of the Theory of Elasticity* de TODHUNTER et PEARSON, Cambridge, 1886-1893. La solution approchée développée ici est l'œuvre de JOURAWSKI. Pour la traduction française de son ouvrage, voir *Ann. ponts et chaussées*, 1856. La théorie exacte prouve que, pour une faible épaisseur de la poutre en comparaison de sa largeur, la divergence entre théories exacte et approchée devient très importante.

parallèles au plan moyen. D'après notre hypothèse les contraintes de cisaillement τ_{xy} sont uniformément réparties sur la face verticale acc_1a_1. Le moment $(\tau_{xy}bdy)dx$ de ces contraintes, par rapport à l'arête ee_1 de l'élément, équilibre le moment $(\tau_{xy}bdx)dy$ dû aux contraintes de cisaillement réparties sur la face horizontale cdd_1c_1 de l'élément. Par suite

$$\tau_{xy}bdydx = \tau_{yz}bdxdy \qquad \text{et} \qquad \tau_{yz} = \tau_{zy},$$

c'est-à-dire : les contraintes de cisaillement s'exerçant sur deux faces perpendiculaires de l'élément sont égales (4). On aboutissait précédemment à la même conclusion en traction simple (voir p. 41) et aussi en traction ou compression dans deux directions perpendiculaires (voir p. 46).

On prouve l'existence des contraintes de cisaillement dans les plans parallèles au plan neutre par des expériences simples. Soit deux barres rectangulaires égales placées toutes deux en appui simple (fig. 102), et soumises à l'action d'une charge concentrée P. S'il n'y a pas de frottement entre les barres, la flexion de chacune d'elles sera indépendante de celle de l'autre ; chacune subira une compression des fibres longitudinales supérieures et une traction des fibres inférieures, l'état du système est celui représenté par la figure 102b. Les fibres longitudinales inférieures de la barre du dessus subissent un glissement par rapport aux fibres supérieures de la barre du dessous. Dans une barre pleine d'épaisseur $2h$ (fig. 102a) il existe des contraintes de cisaillement le long du plan neutre nn, qui préviennent ce glissement de la partie supérieure de la barre par rapport à la partie inférieure (voir fig. 102b) (5). C'est en raison de cette impossibilité de glissement que la barre d'épaisseur $2h$ est plus rigide et plus solide que deux barres égales d'épaisseur h. En pratique, on utilise quelquefois des clavettes a, b, c, ... dans des poutres composées en bois afin d'empêcher le glissement (fig. 103a). L'examen des espacements libres autour d'une clavette, figure 103b, nous permet de déterminer le sens du glissement dans le cas d'une poutre composée, et

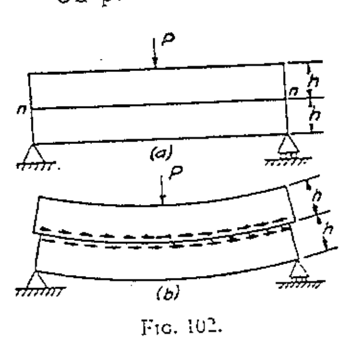


Fig. 102.

(4) On ne tient compte ici que de la valeur absolue de ces contraintes.

(5) La rangée supérieure de flèches figure l'action de la moitié inférieure de la poutre sur la moitié supérieure. La rangée inférieure de flèches indique l'action de la moitié supérieure sur la moitié inférieure.

par suite la direction des contraintes de cisaillement, dans le plan neutre, dans le cas d'une poutre pleine (6).

L'étude ci-dessus démontre que la contrainte de cisaillement τ_{xy} en un

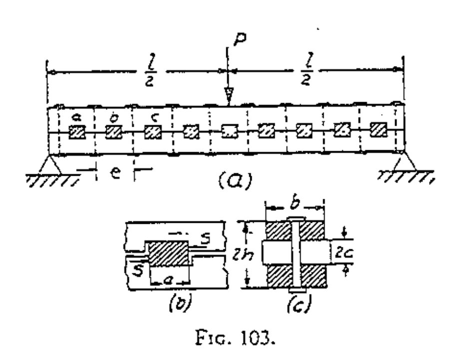


Fig. 103.

point quelconque de la section verticale d'une poutre est verticale en direction et numériquement égale à la contrainte de cisaillement horizontale τ_{yz} du plan horizontal passant par le point considéré. Cette dernière contrainte se calcule aisément d'après la condition d'équilibre de l'élément pp_1nn_1 découpé dans la poutre par deux sections voisines mn, m_1n_1 et par le plan horizontal pp_1, figures 104a et 104b. Les seuls efforts agissant sur cet élément, suivant l'axe x, sont les contraintes de cisaillement τ_{yz} sur le côté pp_1 et la contrainte normale σ_z sur les côtés pn, p_1n_1. Si les moments fléchissants des sections mn, m_1n_1 sont égaux, c'est-à-dire, dans le cas de la flexion pure, les contraintes normales σ_z sur les côtés

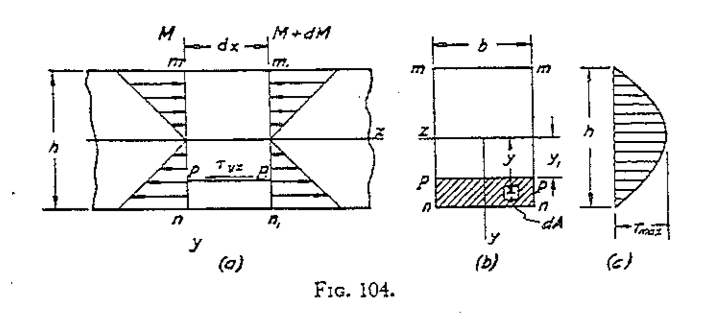


Fig. 104.

(6) Pour l'analyse des poutres composées en bois voir l'étude de F. Stüssi, « Schwere Notbrücke mit verdübelten Balken », Gesellschaft für militärische Bautechnik, Zürich.

np, n_1p_1 sont aussi égales et s'équilibrent mutuellement. Par suite, la contrainte de cisaillement τ_{yx} est nulle.

Considérons alors le cas plus général d'un moment fléchissant variable, soit M et $M+\mathrm{d}M$ les moments des sections mn et m_1n_1. L'effort normal, agissant sur une aire élémentaire $\mathrm{d}A$ du côté $nppn$, est (éq. 57)

$$\sigma_x \mathrm{d}A = \frac{My}{I_z}\mathrm{d}A .$$

La somme de tous ces efforts répartis sur le côté $nppn$ de l'élément est

$$\int_{y_1}^{h/2} \frac{My}{I_z}\mathrm{d}A . \tag{a}$$

De la même manière, la somme des efforts normaux s'exerçant sur $n_1p_1p_1n_1$ est

$$\int_{y_1}^{h/2} \frac{(M+\mathrm{d}M)\,y}{I_z}\mathrm{d}A . \tag{b}$$

L'effort dû aux contraintes de cisaillement τ_{yx} s'exerçant sur le côté supérieur pp_1 de l'élément est

$$\tau_{yx} b\mathrm{d}x . \tag{c}$$

Les efforts exprimés par (a), (b), (c) doivent satisfaire à $\Sigma X = 0$, par suite,

$$\tau_{yx} b\mathrm{d}x = \int_{y_1}^{h/2} \frac{(M+\mathrm{d}M)\,y}{I_z}\mathrm{d}A - \int_{y_1}^{h/2} \frac{My}{I_z}\mathrm{d}A ,$$

d'où l'on tire

$$\tau_{yx} = \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x}\frac{1}{bI_z}\int_{y_1}^{h/2} y\mathrm{d}A ,$$

ou, en utilisant (50),

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{V}{bI_z}\int_{y_1}^{h/2} y\mathrm{d}A . \tag{64}$$

L'intégrale de cette équation représente le moment de la portion hachurée de la section transversale par rapport à l'axe neutre z (fig. 104b). Pour la section rectangulaire étudiée,

$$\mathrm{d}A = b\mathrm{d}y$$

et l'intégrale devient

$$\int_{y_1}^{h/2} by\mathrm{d}y = \left|\frac{by^2}{2}\right|_{y_1}^{h/2} = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y_1^2\right). \tag{d}$$

On obtient le même résultat en multipliant l'aire $b[(h/2)-y_1]$, de la portion hachurée, par la distance

$$\tfrac{1}{2}\,[(h/2)+y_1]$$

séparant son centre de gravité de l'axe neutre.

Substituons (d) dans (64) nous obtenons, pour la section rectangulaire,

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{V}{2I_z}\left(\frac{h^2}{4} - y_1^2\right). \tag{65}$$

On constate que la répartition des contraintes de cisaillement τ_{xy} n'est pas uniforme à travers la poutre. La valeur maximum de τ_{xy} est atteinte pour $y_1 = 0$, c'est-à-dire, pour des points situés sur l'axe neutre, d'après (65),

$$(\tau_{xy})_{\max} = \frac{Vh^2}{8I_z}$$

ou, puisque $I_z = bh^3/12$,

$$(\tau_{xy})_{\max} = \frac{3}{2}\cdot\frac{V}{bh} . \tag{66}$$

Ainsi donc, dans le cas d'une section rectangulaire, la contrainte de cisaillement maximum est 50 pour cent supérieure à la contrainte de cisaillement moyenne, obtenue en divisant l'effort tranchant par l'aire de la section droite.

Dans les calculs précédents nous avons considéré l'élément pnp_1n_1 de la partie inférieure de la poutre. On arriverait au même résultat si l'on avait conduit les calculs en prenant un élément de la partie supérieure.

Pour les points situés au sommet et à la base de la section, $y_1 = \pm h/2$ et l'équation (65) donne $\tau_{xy} = 0$. Le graphe de l'équation (65), figure 104c, indique que la répartition des contraintes de cisaillement, à travers l'épaisseur de la poutre, suit une loi parabolique. L'aire hachurée, limitée par la parabole, est égale, comme il se doit, à $\frac{2}{3}(\tau_{xy})_{\max}hb = V$ lorsqu'on la multiplie par la largeur b de la poutre.

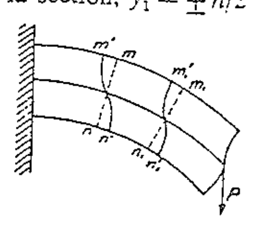


Fig. 105.

Une conséquence naturelle des contraintes de cisaillement est la déformation qui entraîne le gauchissement des sections initialement planes. On met facilement en évidence ce gauchissement en soumettant une barre rectangulaire en caoutchouc à la flexion, à l'aide d'une force appliquée sur son extrémité ; on aura préalablement tracé des droites verticales sur cette barre (fig. 105). Ces droites, sous l'effet de la flexion, s'incurvent de telle façon que la déviation maximum se produit sur la surface neutre. Aux points m', m_1', n', n_1', la déformation est nulle et les courbes $m'n'$, $m_1'n_1'$ sont normales aux surfaces supérieure et inférieure de la barre après flexion. Sur la surface neutre les angles entre les tangentes aux courbes $m'n'$, $m_1'n_1'$ et les sections normales mn, m_1n_1 sont égaux à $\gamma = (\tau_{xy})_{max}/G$. Aussi longtemps que l'effort tranchant V reste constant le long de la poutre le gauchissement de toutes les sections est le même, si bien que $mm' = m_1m_1'$, $nn' = n_1n_1'$, et la tension ou le retrait, provoqué par le moment fléchissant dans les fibres longitudinales, n'est pas affecté par le cisaillement. Ce fait explique alors la validité de l'équation (57), établie dans le cas de la flexion pure et fondée sur l'hypothèse suivant laquelle les sections d'une barre restent planes pendant la flexion.

L'étude approfondie du problème (7) montre aussi que le gauchissement des sections n'affecte pas substantiellement la déformation des fibres longitudinales lorsqu'une charge répartie s'exerce sur la poutre et lorsque l'effort tranchant varie de façon continue le long de celle-ci. Dans le cas de charges concentrées la distribution de la contrainte, au voisinage de ces charges, est plus compliquée, mais cette divergence avec la loi linéaire est toutefois localisée (voir 2e partie).

Problèmes

1. Déterminer les valeurs limites des charges P agissant sur la poutre rectangulaire en bois de la figure 106, sachant que $b = 20$ cm, $h = 25$ cm, $\sigma_W = 56$ bars, $\tau_W = 15$ bars, $c = 45$ cm.

Solution. Les diagrammes du moment fléchissant et de l'effort tranchant sont représentés sur la figure 106.

$$V_{max} = P, \qquad M_{max} = P \cdot c.$$

(7) Voir W. Voigt, *Göttingen Abhandl.*, vol. 34, 1887 ; J. H. Michell, *Quart. J. Math.*, vol. 32, p. 63, 1901 ; L. N. G. Filon, *Trans. Roy. Soc. (London) A.*, vol. 201, 1903 et *Proc. Roy. Soc. (London)*, vol. 72, 1904. Voir aussi Th. Karman, *Abhandl. Aerodyn. Inst., Tech. Hochschule (Aachen)*, vol. 7, 1927.

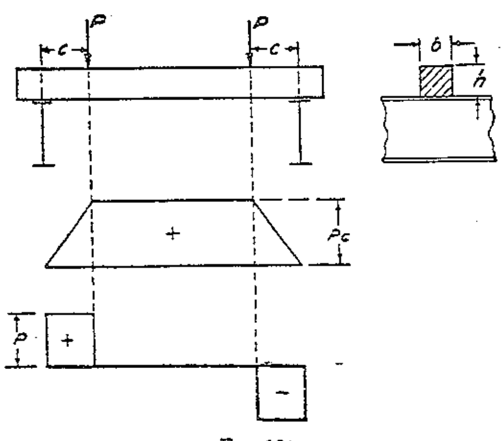


Fig. 106.

D'après les équations

$$\frac{Pc}{Z} = \sigma_W \qquad \text{et} \qquad \frac{3}{2}\frac{P}{bh} = \tau_W,$$

nous obtenons

$$P = 25\ \text{kN} \qquad \text{et} \qquad P = 50\ \text{kN}.$$

Donc 25 kN est la valeur limite de la charge P.

2. Déterminer la contrainte normale maximum σ_x et la contrainte de cisaillement maximum τ_{yx} du plan neutre de la poutre de la figure 107, sachant que $a = 60$ cm, $c = 120$ cm, $b = 20$ cm, $h = 25$ cm et $P = 2\,700$ daN.

Réponse. $(\sigma_x)_{max} = 52$ bars, $(\tau_{yx})_{max} = 5{,}4$ bars.

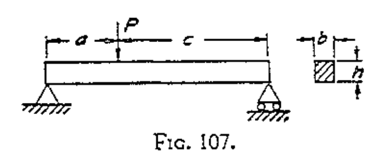


Fig. 107.

3. Déterminer la contrainte de cisaillement maximum du plan neutre d'une poutre rectangulaire chargée uniformément lorsque sa longueur est $l = 1{,}83$ m, la charge $q = 1\,488{,}2$ daN/m, la hauteur de la section $h = 25$ cm et la largeur $b = 20$ cm.

Réponse. $\tau_{max} = 4$ bars.

4. Déterminer les contraintes de cisaillement maximums dans les poutres verticales AB du problème 2, paragraphe 25.

27. Répartition des contraintes de cisaillement dans le cas d'une section circulaire.

Dans l'étude de la répartition des contraintes de cisaillement sur une section circulaire (fig. 108) il n'y a aucune raison de supposer qu'elles sont toutes parallèles à l'effort tranchant V. En fait, on démontre aisément qu'aux points p (fig. 108b) situés sur le contour de la section, le cisaillement est tangent au contour. Considérons un élément infinitésimal $abcd$ (fig. 108c) en forme de parallélépipède rectangle dont la face $adfg$ est dans le même plan que la surface de la poutre, et la face $abcd$ dans le plan yz de la section. Si

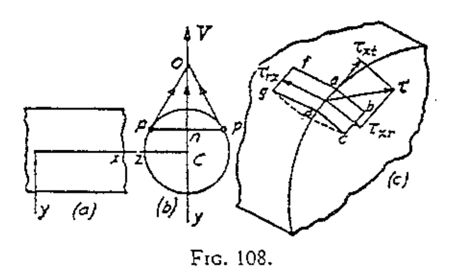


Fig. 108.

le cisaillement agissant sur le côté $abcd$ de l'élément a la direction de τ, on peut toujours le décomposer suivant une composante radiale τ_{xr} et une composante tangentielle au contour τ_{xt}. Nous avons déjà démontré (voir p. 110), à l'aide de l'équation d'équilibre d'un élément, que lorsqu'un cisaillement s'exerce sur une aire élémentaire, un cisaillement numériquement égal s'exerce aussi sur l'aire élémentaire perpendiculaire à τ. Appliquons cette hypothèse à notre cas, on peut conclure que si le cisaillement τ_{xr} agit sur l'élément $abcd$, suivant une direction radiale, il existe un cisaillement égal τ_{rz} sur le côté $adfg$ de l'élément se trouvant sur la surface de la poutre. Si la surface transversale de la poutre est libre de toute contrainte de cisaillement, la composante radiale τ_{xr} du cisaillement est nulle, c'est-à-dire, τ a la direction de la tangente au contour de la section de poutre. Au milieu n de la corde pp, la symétrie exige que le cisaillement ait la direction de l'effort tranchant V. Par suite, les directions des cisaillements aux points p et n se coupent en un point O de

l'axe y (fig. 108b). Supposons alors que le cisaillement en tout autre point de la corde pp soit aussi dirigé vers O, on définit complètement les directions des cisaillements. Comme seconde hypothèse, nous considérons que les composantes verticales des cisaillements sont égales en tous points de la corde pp (⁸). Comme cette hypothèse coïncide totalement avec celle faite pour une section rectangulaire, on utilise (64) pour le calcul de cette composante. Dans ce cas, b représente la longueur de la corde pp. Connaissant la direction réelle du cisaillement et sa composante verticale on obtient aisément sa valeur en un point quelconque de la section.

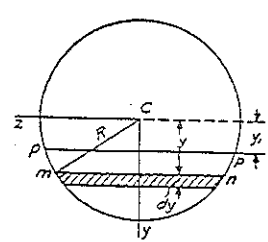


Fig. 109.

Calculons à présent les cisaillements le long de pp (fig. 109). En appliquant l'équation (64) au calcul de la composante verticale τ_{xy} de ces cisaillements on trouve le moment de l'arc de cercle au-dessous de pp, par rapport à l'axe z. La surface élémentaire mn a pour dimensions $2\sqrt{R^2-y^2}$ et dy. Son aire est $dA = 2\sqrt{R^2-y^2}\,dy$. Le moment de cette bande, par rapport à Cz, est ydA et le moment total du segment entier est

$$\int_{y_1}^{R} 2\sqrt{R^2-y^2}\cdot y dy = \tfrac{2}{3}(R^2-y_1^2)^{3/2}.$$

Remplaçons dans (64) et substituons $2\sqrt{R^2-y^2}$ à b, on obtient pour la composante verticale de cisaillement :

$$\tau_{xy} = \frac{V(R^2-y_1^2)}{3\,I_z}, \tag{67}$$

et le cisaillement total aux points p (fig. 109) est

$$\tau = \frac{\tau_{xy}\cdot R}{\sqrt{R^2-y_1^2}} = \frac{VR\sqrt{R^2-y_1^2}}{3\,I_z}.$$

On constate que le maximum τ s'obtient pour $y_1 = 0$, c'est-à-dire, pour l'axe neutre de la section. Par suite, substituons $I_z = \pi R^4/4$, on trouve

$$\tau_{\max} = \frac{4}{3}\frac{V}{\pi R^2} = \frac{4}{3}\cdot\frac{V}{A}. \tag{68}$$

Dans le cas d'une section circulaire, la contrainte de cisaillement maximum est donc supérieure de 33 pour cent à la valeur moyenne obtenue en divisant l'effort tranchant par l'aire de la section.

(⁸) La théorie approchée, fondée sur les deux hypothèses ci-dessus, donne une exactitude satisfaisante, et la comparaison avec la théorie exacte montre que l'erreur dans la valeur du cisaillement maximum est de l'ordre de 5 pour cent, ce qui n'est point important en pratique. Voir Saint-Venant, *loc. cit.*, p. 100. Voir aussi A. E. H. Love, *Mathematical Theory of Elasticity*. 4ᵉ éd., p. 346, 1927.

28. Contraintes de cisaillement dans les poutres en I

En étudiant la répartition des cisaillements dans l'âme d'une poutre en I ou en T (fig. 110), on fait les mêmes hypothèses que pour une section rectangulaire ; c'est-à-dire que les cisaillements sont parallèles à l'effort tranchant V et sont uniformément répartis à travers l'épaisseur b_1 de l'âme. Donc, on peut utiliser l'équation (64) pour le calcul des contraintes τ_{xy}. Pour les points du segment pp, situé à la distance y_1 de l'axe neutre, la largeur de la section étant b_1, le moment de la partie hachurée de la section, par rapport à l'axe neutre z, est

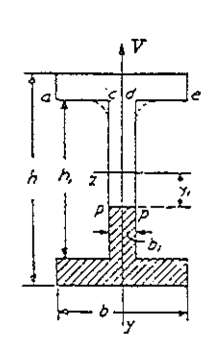


FIG. 110.

$$\int_{y_1}^{h/2} y\,dA = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4}-\frac{h_1^2}{4}\right)+\frac{b_1}{2}\left(\frac{h_1^2}{4}-y_1^2\right).$$

Substituons dans l'équation (64), nous obtenons

$$\tau_{xy} = \frac{V}{b_1 I_z}\left[\frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4}-\frac{h_1^2}{4}\right)+\frac{b_1}{2}\left(\frac{h_1^2}{4}-y_1^2\right)\right]. \tag{69}$$

On remarque que la contrainte τ_{xy} varie le long de la hauteur de la poutre en suivant une loi parabolique. Les valeurs maximum et minimum de τ_{xy} dans l'âme de la poutre s'obtiennent en posant $y_1 = 0$ et $y_1 = h_1/2$, ce qui donne :

$$(\tau_{xy})_{\max} = \frac{V}{b_1 I_z}\left[\frac{bh^2}{8}-\frac{h_1^2}{8}(b-b_1)\right], \tag{70}$$

$$(\tau_{xy})_{\min} = \frac{V}{b_1 I_z}\left(\frac{bh^2}{8}-\frac{bh_1^2}{8}\right). \tag{71}$$

Lorsque b_1 est très petit par rapport à b il n'existe pas une grande différence entre $(\tau_{xy})_{\max}$ et $(\tau_{xy})_{\min}$, et la répartition du cisaillement sur la section de l'âme est pratiquement uniforme.

On obtient une bonne approximation de $(\tau_{xy})_{\max}$ en divisant l'effort tranchant total V par l'aire de la section de l'âme seule. Ceci découle du fait que les cisaillements, répartis sur la section de l'âme, créent une force sensiblement égale à V ; ce qui signifie que l'âme supporte à peu

près tout l'effort tranchant et que les ailes ne prennent qu'une part secondaire à sa transmission. On démontre ceci en calculant la somme

$$V_1 = \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \tau_{xy} b_1\,dy .$$

Remplaçons τ_{xy} par l'expression (69), nous obtenons

$$V_1 = \frac{V}{b_1 I_z}\int_{-h_1/2}^{h_1/2}\left[\frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4}-\frac{h_1^2}{4}\right)+\frac{b_1}{2}\left(\frac{h_1^2}{4}-y_1^2\right)\right]b_1\,dy,$$

et, après intégration,

$$V_1 = \frac{V}{I_z}\left[\frac{b(h-h_1)}{2}\cdot\frac{h+h_1}{2}\cdot\frac{h_1}{2}+\frac{b_1h_1^3}{12}\right]. \tag{a}$$

Pour une faible épaisseur des ailes, c'est-à-dire lorsque h_1 tend vers h, le moment d'inertie I_z se représente, avec une exactitude suffisante, par l'équation :

$$I_z = \frac{b(h-h_1)}{2}\cdot\frac{(h+h_1)^2}{8}+\frac{b_1h_1^3}{12}, \tag{b}$$

dans laquelle le premier terme représente l'aire de la section des ailes multipliée par le carré de la distance $(h+h_1)/4$ de leurs centres à l'axe z, et qui est approximativement le moment d'inertie de la section des ailes. Le second terme est le moment d'inertie de la section de l'âme. Comparons (a) et (b), on remarque, lorsque h_1 tend vers h, que l'effort V_1 tend vers V et l'effort tranchant est pratiquement supporté par l'âme seule.

Lors de l'étude de la répartition des cisaillements sur les sections des ailes, on doit abandonner l'hypothèse suivant laquelle les cisaillements restent constants sur la largeur de la section. Au niveau ae (fig. 110), par exemple, le long du contour inférieur de l'aile, ac et de, le cisaillement τ_{xy} doit être nul puisque la contrainte égale correspondante τ_{xy}, de la surface inférieure libre de l'aile, est nulle (voir p. 110 et aussi fig. 108c). Toutefois, dans la partie cd les cisaillements sont nuls mais ont par contre, dans l'âme, la valeur de $(\tau_{xy})_{\min}$ calculée plus haut. Ce qui prouve qu'à la jonction cd de l'âme et de l'aile la distribution des cisaillements suit une loi plus compliquée que celle étudiée dans notre analyse élémentaire. Aux points c et d les angles aigus sont remplacés par des congés, comme l'indique le pointillé de la figure 110, afin de réduire la concen-

tration de contrainte en ces points. La répartition des cisaillements dans les ailes sera étudiée de manière plus détaillée dans la seconde partie.

Problèmes

1. Déterminer $(\tau_{xy})_{max}$ et $(\tau_{xy})_{min}$ dans la section de l'âme du profilé I, figure 110, sachant que $b = 12,7$ cm. $b_1 = 1,3$ cm, $h = 30,5$ cm, $h_1 = 26,7$ cm, $V = 13\,608$ daN. Déterminer l'effort V_1 transmis par l'âme.

Réponse. $(\tau_{xy})_{max} = 412,6$ bars, $(\tau_{xy})_{min} = 311,4$ bars, $V_1 = 0,945\ V$.

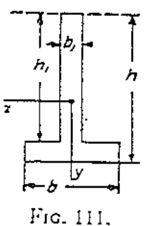


Fig. 111.

2. Déterminer la contrainte de cisaillement maximum dans l'âme d'une poutre T (fig. 111), sachant que $h = 20,3$ cm, $h_1 = 17,8$ cm, $b = 10,2$ cm, $b_1 = 2,5$ cm, $V = 453,6$ daN.

Réponse. On utilise la même méthode que pour une poutre en I, on trouve $(\tau_{xy})_{max} = 12,4$ bars.

3. Déterminer la contrainte de cisaillement maximum des problèmes 1 et 6 du paragraphe 25. Utiliser le profilé I standard et supposer que l'effort tranchant total est uniformément réparti sur la section de l'âme.

4. Déterminer la contrainte de cisaillement maximum du profilé ⊏ du problème 2, page 100, sachant que $V = 5\,443$ daN.

Réponse. $(\tau_{xy})_{max} = 31$ bars.

29. Contraintes principales dans le cas de la flexion

A l'aide des équations (57) et (64) on calcule la contrainte normale σ_x et le cisaillement τ_{xy} en tout point d'une section, à condition de connaître le moment fléchissant M et l'effort tranchant V dans cette section. La valeur absolue maximum de σ_x se développe dans la fibre la plus éloignée de l'axe neutre et la valeur maximum de τ_{xy} se situe sur l'axe neutre. Dans la plupart des cas, seules les valeurs maximums de σ_x et τ_{xy}, obtenues comme on vient de l'indiquer, sont prises en considération dans les projets, et les dimensions des sections de poutres doivent satisfaire aux conditions :

$$(\sigma_x)_{max} \leqslant \sigma_W \qquad \text{et} \qquad (\tau_{xy})_{max} \leqslant \tau_W .$$

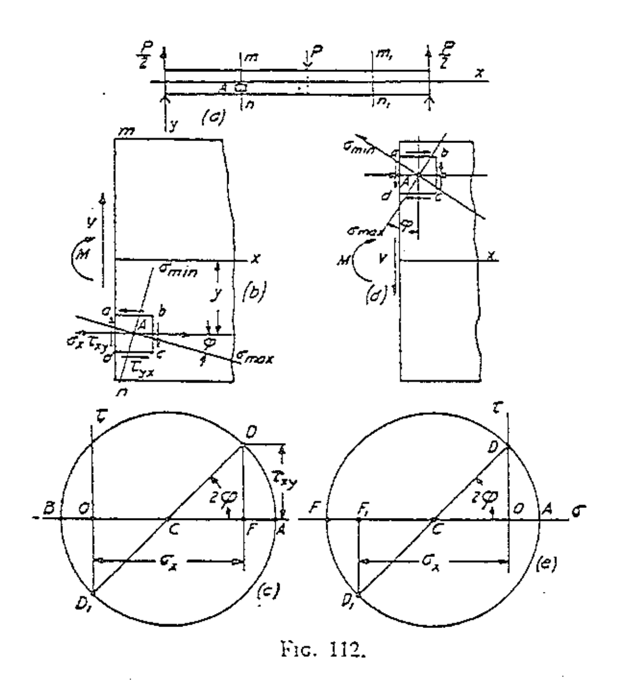
On suppose ici que la résistance du matériau est la même en traction et en compression, σ_W a même valeur dans les deux cas. Autrement, les

conditions de résistance en traction et en compression doivent être satisfaites séparément et l'on obtient

$$(\sigma_x)_{max} \leqslant \sigma_W \text{ en traction}; \qquad |(\sigma_x)_{min}| \leqslant \sigma_W \text{ en compression}.$$

Toutefois, dans certains cas il est nécessaire d'établir une analyse plus détaillée des contraintes et il faut rechercher alors les contraintes principales. Développons ce genre de calcul pour une poutre en appui simple et sollicitée en son milieu (fig. 112). Pour un point A de la section mn, situé au-dessous de l'axe neutre, les valeurs des contraintes σ_x et $\tau_{yx} = \tau_{xy}$ sont déduites des équations (57) et (64). On voit, sur la figure 112*b*, ces contraintes s'exercer sur un élément infinitésimal pris dans la poutre alentour du point A, leurs directions se déduisent de celles de M et V. Pour un élément infinitésimal on néglige les variations de contraintes σ_x, τ_{xy} des différents points de l'élément, et l'on suppose que l'élément est dans un *état de contrainte homogène*, c'est-à-dire, on considère les quantités σ_x et τ_{xy} constantes dans tout l'élément. Un tel état de contrainte est illustré par la figure 40*a*, pour un élément de dimensions finies.

D'après une précédente étude (voir p. 45) nous savons que les contraintes sur les côtés d'un élément, isolé d'un corps en état de


Fig. 112.

contrainte, varient avec les directions de ces côtés et qu'il est possible d'orienter l'élément de telle sorte que seules les contraintes normales soient conservées (voir p. 47). Les directions de ces côtés s'appellent alors *directions principales* et les contraintes correspondantes, *contraintes principales*. Dans le cas présent, les valeurs de ces contraintes se déduisent des équations (31) et (32) en y remplaçant σ_y par zéro. On obtient alors :

$$\sigma_{max} = \tfrac{1}{2}\sigma_x + \sqrt{(\tfrac{1}{2}\sigma_x)^2 + \tau_{xy}^2}\,, \tag{72}$$

$$\sigma_{min} = \tfrac{1}{2}\sigma_x - \sqrt{(\tfrac{1}{2}\sigma_x)^2 + \tau_{xy}^2}\,. \tag{73}$$

On remarque que σ_{max} est une traction et σ_{min} une compression. Connaissant les contraintes principales, on calcule la contrainte de cisaillement maximum, en un point quelconque, à l'aide de l'équation (34) :

$$\tau_{max} = \tfrac{1}{2}(\sigma_{max} - \sigma_{min}) = \sqrt{(\tfrac{1}{2}\sigma_x)^2 + \tau_{xy}^2}\,. \tag{74}$$

On utilisera le cercle de Mohr pour déterminer les directions des contraintes principales. Pour un élément tel que A (fig. 112*b*), le cercle de Mohr correspondant est porté sur la figure 112*c*. On détermine le point D, représentant les contraintes sur les côtés bc et ad de l'élément, en posant $\overline{OF} = \sigma_x$ et $\overline{DF} = \tau_{xy}$. Le segment $\overline{OF}$ est pris dans la direction de σ positif, $\overline{DF}$ est dirigé vers le haut car σ_x est une contrainte de traction, et les cisaillements τ_{xy} sur bc et cd forment un couple orienté dans le sens des aiguilles d'une montre (voir p. 74). Le point D_1 représente les contraintes sur les côtés ab et dc de l'élément pour lesquels les contraintes normales sont nulles et les contraintes de cisaillement négatives. Le cercle de diamètre DD_1 détermine $\sigma_{max} = \overline{OA}$ et $\sigma_{min} = -\overline{OB}$. L'angle 2φ résulte de la même construction et la direction de σ_{max} (fig. 112*b*) s'obtient en mesurant φ à partir de l'axe x dans le sens des aiguilles d'une montre ; σ_{min} est naturellement perpendiculaire à σ_{max}.

Considérons une section m_1n_1 à droite de la charge P (fig. 112*a*) et un point A au-dessus de l'axe neutre, la direction des contraintes s'exerçant sur un élément $abcd$ en A est celle indiquée sur la figure 112*d*. La figure 112*e* donne le cercle de Mohr correspondant. Le point D représente les contraintes sur les côtés ab, dc de l'élément $abcd$ et le point D_1, les contraintes sur ad et bc. L'angle φ, déterminant la direction de σ_{max}, est compté dans le sens des aiguilles d'une montre à partir de la normale extérieure jusqu'à ab ou cd (voir fig. 112*d*).

Si l'on prend un point de la surface neutre, σ_x s'annule. Un élément pris en ce point se trouve dans les conditions de cisaillement pur. Les

directions des contraintes principales sont inclinées de 45° sur les axes x et y.

L'on peut construire deux systèmes de courbes orthogonales dont les tangentes en chaque point ont mêmes directions que les contraintes principales en ce point. Ces courbes se nomment *trajectoires des contraintes* ou *lignes isostatiques*. La figure 113 représente les lignes isostatiques d'une poutre cantilever rectangulaire, sollicitée à son extrémité. Toutes ces trajectoires coupent l'axe neutre sous un angle de 45°, et elles sont des tangentes horizontales et verticales aux points où la contrainte de cisaillement τ_{xy} est nulle, c'est-à-dire, sur les faces supérieure et inférieure de la poutre. Les trajectoires donnant les directions de σ_{max} (traction) sont représentées par des traits pleins et l'autre système de trajectoires par des tirets. La figure 114 donne les trajectoires et les diagrammes de distribution des contraintes σ_x et τ_{xy} sur plusieurs sections d'une poutre rectangulaire en appui simple, soumise à une charge uniforme. On voit nettement que σ_x est maximum à mi-portée, là où le moment fléchissant M est maximum, et τ_{xy} est maximum aux appuis, où s'exerce l'effort tranchant maximum (*).

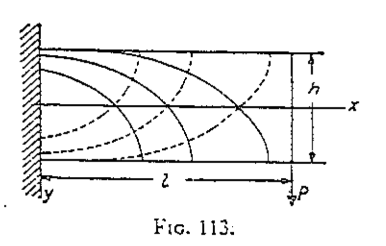


Fig. 113.

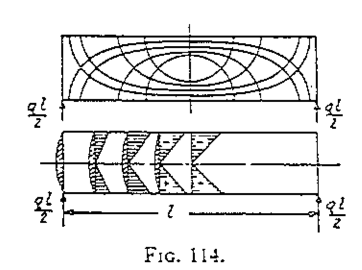


Fig. 114.

Le calcul des poutres se caractérise particulièrement par la recherche des valeurs numériques maximums de σ. D'après (72), on remarque que dans les fibres extrêmes tendues, où le cisaillement est nul, la contrainte normale longitudinale σ_x devient la contrainte principale, $\sigma_{max} = (\sigma_x)_{max}$. Pour les fibres proches de l'axe neutre la contrainte longitudinale σ_x est plus petite que dans les fibres extrêmes. Toutefois, il existe aussi une contrainte de cisaillement τ_{xy}, et les contraintes σ_x et τ_{xy}, agissant de concert en ce point, produisent une contrainte principale, déduite de (72), plus grande en valeur absolue que celle de la fibre extrême. Pour les poutres à section rectangulaire ou circulaire, dans

(*) Plusieurs exemples de construction des trajectoires des contraintes sont étudiés par I. Wagner, *Z. österr. Ing. u. Architekt. Ver.*, p. 615, 1911.

lesquelles la contrainte de cisaillement τ_{xy} varie de façon continue à travers l'épaisseur de la poutre, ce qui n'est habituellement pas le cas, la contrainte $(\sigma_x)_{max}$, calculée pour la fibre extrême dans la section à moment fléchissant maximum, constitue la contrainte maximum s'exerçant sur la poutre. Toutefois, pour une poutre en I, où il se produit une variation brusque du cisaillement à la jonction de l'aile et de l'âme (voir p. 119), la contrainte maximum, calculée en ce point d'après (72), est supérieure à la contrainte de traction $(\sigma_x)_{max}$ régnant dans la fibre extrême, et l'on en tiendra compte dans le calcul. Pour illustrer cette remarque, considérons le cas de la figure 112*a* représentant une poutre en I avec les dimensions du problème 1, page 120, la longueur $l = 0,60$ m et $P = 27\,216$ daN. Alors $M_{max} = 4\,148$ m · daN et $V_{max} = 13\,608$ daN. D'après (57) la contrainte de traction dans la fibre extrême est

$$(\sigma_x)_{max} = \frac{4\,148 \times 10^3 \times 150}{11\,154 \times 10^4} = 5,57 \text{ hectobars} .$$

Pour un point situé à la jonction de l'aile et de l'âme nous obtenons les contraintes normale et de cisaillement suivantes :

$$\sigma_x = \frac{5,57 \times 262,5}{300} = 4,87 \text{ hectobars} ,$$

$$\tau_{xy} = 3,11 \text{ hectobars} .$$

Par suite, d'après (72), la contrainte principale est

$$\sigma_{max} = 6,18 \text{ hectobars} .$$

On notera qu'à la jonction âme-aile σ_{max} est supérieur à la traction dans la fibre extrême, et il faudra donc en tenir compte dans le calcul.

Problèmes

1. Déterminer σ_{max} et σ_{min} en un point situé à 5 cm au-dessous de l'axe neutre dans la section qui se trouve à 0,90 m de l'extrémité chargée de la poutre cantilever (fig. 113), sachant que la hauteur $h = 20$ cm, la largeur $b = 10$ cm et $P = 907$ daN. Déterminer l'angle entre σ_{max} au point considéré et l'axe x.

Réponse. $(\sigma_x) = -59,3$ bars; $(\tau_{xy}) = 5,1$ bars; $\sigma_{max} = 0,4$ bar; $\sigma_{min} = -59,7$ bars. L'angle, compté dans le sens des aiguilles d'une montre, de σ_{max} à l'axe x, est égal à 85°16′.

2. Déterminer σ_{max} et σ_{min} sur l'axe neutre et dans la section située à 0,30 m de l'appui gauche de la poutre rectangulaire en appui aux extrémités, uniformément chargée (fig. 114). Les dimensions de la section sont les mêmes que dans le problème précédent, de plus $q = 148,8$ daN/m ; $l = 3$ m.

Réponse. $\sigma_{max} = -\sigma_{min} = 13,2$ bars.

3. Déterminer la longueur de la poutre I de la page 124, pour $(\sigma_x)_{max} = \sigma_{max}$ à la jonction de l'aile et de l'âme.

Réponse. $l = 1,01$ m.

30. Contraintes dans les poutres composées

En construction on utilise fréquemment les poutres composées et l'on calcule généralement leurs contraintes en supposant que les éléments constitutifs sont assemblés de façon rigide. L'étude comporte d'abord le calcul de la poutre comme poutre simple, ensuite le calcul et la disposition des éléments d'assemblage des différentes parties de la poutre. Dans le premier cas on applique les formules relatives aux poutres simples en tenant compte de l'influence des trous de rivet, des boulons, des fentes, etc., par la considération des sections nettes. Illustrons par quelques exemples le calcul des clavettes et rivets.

Considérons d'abord une poutre composée en bois (fig. 103). On suppose que les clavettes placées entre les éléments de la poutre sont suffisamment solides de manière à résister aux efforts S (fig. 103*b*). On utilise alors l'équation (57) pour déterminer σ_x. Pour tenir compte de l'affaiblissement de la section, dû aux rainures et aux trous de boulons, on ne considère que la partie hachurée de la section indiquée sur la figure 103*c*. Par suite,

$$I_z = \frac{(b-d)}{12}[(2\,h)^3 - (2\,c)^3] .$$

On suppose, pour le calcul de l'effort tranchant S s'exerçant sur chaque clavette, que celui-ci est égal à l'effort tranchant réparti dans une poutre simple sur l'aire eb de la surface neutre, où b représente la largeur de la poutre et e la distance entre les centres des clavettes (voir fig. 103*a*). Par suite, en utilisant l'équation (66) et en supposant que l'épaisseur de la poutre est égale à $2h$, nous obtenons

$$S = eb \cdot \frac{3}{2}\frac{V}{2\,hb} = \frac{3}{2}\frac{Ve}{2\,h} \tag{75}$$

Les dimensions des clavettes et la distance e qui les sépare sont choisies de manière à assurer une résistance suffisante contre le cisaillement des

clavettes et contre l'écrasement du bois sur les faces latérales de la clavette et de sa rainure. Pour ce genre de calculs on suppose grossièrement que les efforts tranchants sont uniformément répartis sur la section moyenne $a \times b$ de la clavette et que la pression sur les faces latérales des clavettes est uniformément répartie sur l'aire $c \times b$. Soit τ_W la contrainte d'utilisation au cisaillement des clavettes et σ'_W la contrainte d'utilisation en compression latérale du bois des clavettes ou des rainures, les équations servant alors à la détermination des clavettes sont :

$$\frac{S}{ab} \leqslant \tau_W \qquad \frac{S}{bc} \leqslant \sigma'_W .$$

En outre, il est nécessaire de s'assurer que la résistance au cisaillement du bois de la poutre, dans le sens des fibres entre deux clavettes, est suffisante. L'effort tranchant est encore égal à S et la section résistante est $b \times (e-a)$. Soit τ'_W la contrainte d'utilisation au cisaillement du matériau, constituant la poutre, suivant les fibres ; la condition de résistance devient

$$\frac{S}{b(e-a)} \leqslant \tau'_W .$$

En plus des clavettes, la liaison des différents éléments de la poutre est assurée par des boulons (fig. 103). Leur serrage provoque des frottements entre les éléments de la poutre. Ces frottements sont généralement négligés dans les calculs et l'on suppose que l'effort tranchant total est supporté par les clavettes. L'expérience montre que ces poutres composées en bois sont moins solides que les poutres simples de mêmes dimensions [10].

Lors du calcul des contraintes σ_z dans les poutres composées en acier ou les poutres en tôle, on tient compte de l'affaiblissement dû aux trous de rivets, en supposant que tous ces trous sont dans une même section de la poutre (fig. 115*a*) [11], et l'on retranche alors leur section diamétrale de la section de la poutre dans l'équation (57), pour le calcul de I_z.

On tient également compte, en pratique, de l'affaiblissement créé par les trous de rivets lors du calcul du cisaillement maximum τ_{zy}. On constate que la section de l'âme est réduite, à cause des trous, dans le rapport $(e-d)/e$, où e désigne la distance séparant les centres des trous

[10] Les expériences faites par le Pr. E. KIDWELL au Michigan College of Mines montrent que la résistance des poutres composées en bois est de l'ordre de 75 pour cent de celle des poutres simples de mêmes dimensions.

[11] Les trous dans l'âme verticale se trouvent dans les sections où les raidisseurs verticaux sont rivés à la membrure.

et d le diamètre de ceux-ci. Par suite, on inclut le facteur $e/(e-d)$ dans le second membre de l'équation (64) pour le calcul de τ_{zy} dans l'âme des poutres composées. Il faut noter que cette manière de calculer l'affaiblissement produit par les trous de rivets ne donne qu'une approximation grossière. La répartition réelle des contraintes, alentour des trous, est

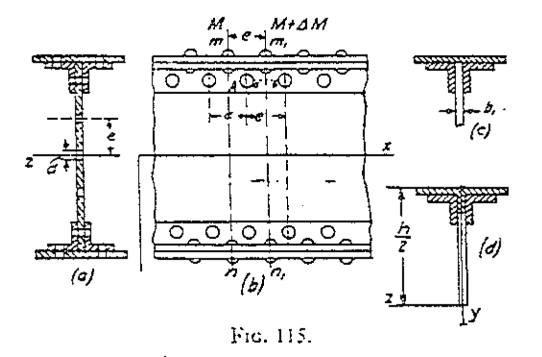


FIG. 115.

très compliquée. Nous étudierons dans la seconde partie la concentration de contraintes sur le contour d'un trou.

Pour calculer l'effort tranchant s'exerçant sur un rivet, tel que le rivet A (fig. 115*d*), considérons les deux sections mn et m_1n_1. En raison de la différence des moments fléchissants de ces deux sections, les contraintes normales σ_x sur les sections mn et m_1n_1 sont différentes, et l'aile de la poutre, hachurée sur la figure 115*c*, a tendance à glisser le long de l'âme. Ce glissement est prévenu par les forces de frottement et par le rivet A. Négligeons les frottements, la force s'exerçant sur le rivet devient égale à la différence des forces agissant dans les sections mn et m_1n_1 de l'aile. La force dans la section mn de l'aile est (voir éq. *a*, p. 112)

$$\frac{M}{I_z}\int y\,\mathrm{d}A ,$$

où l'on étend l'intégration à la section hachurée de l'aile. De la même manière, nous obtenons pour la section m_1n_1,

$$\frac{(M+\Delta M)}{I_z}\int y\,\mathrm{d}A .$$

Par suite, l'effort transmis par le rivet A de l'aile à l'âme est

$$S = \frac{\Delta M}{I_z}\int y\,\mathrm{d}A . \qquad (a)$$

En utilisant l'équation (50) et en substituant la distance e, entre les rivets, à dx, nous obtenons

$$\Delta M = Ve\,,$$

où V est l'effort tranchant dans la section de la poutre passant par A. Substituons dans (a), il vient

$$S = \frac{Ve}{I_z}\int y\mathrm{d}A\,. \qquad (76)$$

L'intégrale de cette équation représente le moment de la section hachurée (fig. 115c) de l'aile par rapport à l'axe neutre z.

On remarque facilement que pour s'opposer au glissement de l'aile sur l'âme, le rivet doit travailler à double section. Supposons que l'effort S est uniformément réparti sur ces deux sections, le cisaillement dans le rivet est

$$\tau = \frac{S}{2\cdot\frac{1}{4}\pi d^2} = \frac{2\,Ve}{\pi d^2 I_z}\int y\mathrm{d}A\,. \qquad (77)$$

L'effort S produit quelquefois une contrainte de cisaillement importante dans l'âme de la poutre le long du plan ab (voir fig. 115b) dont il faut tenir compte. Supposons que ces contraintes soient uniformément réparties et divisons S par l'aire $b_1(e-d)$, nous obtenons

$$\tau' = \frac{V}{b_1 I_z}\cdot\frac{e}{e-d}\int y\mathrm{d}A\,. \qquad (b)$$

En plus de cette contrainte produite par S et transmise par les ailes, il existe des contraintes de cisaillement τ'' dues à la flexion de l'âme et s'exerçant le long du même plan ab. La valeur de ces contraintes s'obtient à l'aide de l'équation (b) ci-dessus, dans laquelle on remplace l'intégrale $\int y\mathrm{d}A$ par le moment statique, par rapport à l'axe neutre z, de la partie de la section rectangulaire de l'âme située au-dessus du plan ab. De cette manière, l'on arrive à l'équation du cisaillement τ_{yz} dans l'âme le long du plan ab (fig. 115b) :

$$\tau_{yz} = \tau' + \tau'' = \frac{V}{b_1 I_z}\cdot\frac{e}{e-d}\int y\mathrm{d}A\,. \qquad (78)$$

L'intégrale est étendue à l'aire hachurée de la section de figure 115d. Connaissant σ_x et τ_{yx}, on calcule alors σ_{max} et σ_{min} pour les points du plan ab, à l'aide des équations (72) et (74), comme nous l'avons expliqué au paragraphe précédent. Puis l'on détermine les directions des contraintes principales.

Nous voyons, par l'étude précédente, que l'on peut faire plusieurs hypothèses simplificatrices pour calculer les contraintes dans les poutres composées en I. Ceci dans une certaine mesure réduit la précision obtenue pour les contraintes, et l'on doit en tenir compte dans le choix des contraintes d'utilisation des poutres composées en I ([12]).

Problèmes

1. Une poutre composée en bois (fig. 103) se compose de deux parties de section rectangulaire assemblées par clavetage. Déterminer l'effort tranchant s'exerçant sur les clavettes et la pression sur ses faces latérales sachant que $P = 2\,250$ daN, la largeur de la poutre $b = 12{,}5$ cm, $2h = 40$ cm, la largeur de la clavette $a = 7{,}5$ cm, son épaisseur $2c = 6{,}25$ cm et l'espacement des centres des clavettes $e = 27{,}5$ cm.

Réponse. $$S = \frac{3}{2}\cdot\frac{1\,125\times 27{,}5}{40} = 1\,160\ \text{daN}\,.$$

L'effort tranchant dans la clavette est

$$\tau = \frac{1\,160}{12{,}5\times 7{,}5} = 12{,}4\ \text{bars}\,.$$

La pression sur la face latérale est

$$p = \frac{S}{bc} = \frac{1\,160\times 2}{12{,}5\times 6{,}25} = 29{,}7\ \text{bars}\,.$$

2. Déterminer l'effort tranchant sur l'axe neutre d'une poutrelle dont l'âme a 1,9 cm d'épaisseur et 125 cm de hauteur, les membrures sont constituées par deux paires de cornières de $15\times15\times1{,}4$ cm. L'effort tranchant total sur la section est égal à 675 kN. Déterminer aussi les contraintes de cisaillement dans les rivets de liaison des membrures à l'âme, sachant que le diamètre de ces rivets est 2,5 cm et l'écartement $e = 10$ cm (fig. 115).

Solution. Nous avons, pour les dimensions données,

$$I_z = 1{,}9\,\frac{125^3}{12} + 4\,(847 + 40{,}3\times 58{,}29^3) = 860\,348\ \text{cm}^4\,.$$

([12]) L'expérience montre que les poutres en I périssent généralement par flambement des ailes ou de l'âme en compression (voir H. F. MOORE, Univ. de l'Illinois, *Bull. No. 68*, 1913). On étudiera ultérieurement la question du flambement. L'influence de la flexion des rivets sur la distribution des contraintes dans les poutres en I a été étudiée par I. ARNOVLEVIC, *Z. Architekt. u. Ingenieurw.*, p. 57, 1910. Il a trouvé, dans ce cas, que les contraintes de flexion, pour des proportions usuelles des poutres, augmentent d'environ 6 pour cent.

Le moment statique de la demi-section, par rapport à l'axe neutre, est

$$\int_0^{h/2} y\mathrm{d}A = 1{,}9\,\frac{62{,}5\times 62{,}5}{2} + 2\times 40{,}3\times 58{,}29 = 8\,409\ \mathrm{cm}^3\,.$$

Dans le calcul 40,3 cm² représente la valeur de l'aire de la section d'une cornière, 847 cm⁴ est la valeur de son moment d'inertie par rapport à l'axe passant par son centre de gravité et parallèle à l'axe neutre de la poutrelle, 58,29 cm représente enfin la distance entre le centre de gravité de chaque cornière et l'axe neutre z de la poutrelle. Toutes ces données peuvent être extraites directement d'un catalogue ou de l'appendice. L'équation (64) nous donne alors.

$$(\tau_{yz})_{\max} = \frac{67\,500\times 8\,409}{1{,}9\times 860\,348} = 347\ \text{bars}\,.$$

Si l'on tient compte de l'affaiblissement de l'âme, provoqué par les trous de rivets,

$$(\tau_{yz})_{\max} = \frac{e}{e-d}\cdot 347 = \frac{4}{3}\cdot 347 = 463\ \text{bars}\,.$$

L'effort S transmis par un rivet est, d'après (76),

$$S = \frac{67\,500\times 10\times 4\,698}{860\,348} = 3\,686\ \text{daN}\,.$$

Enfin le cisaillement dans un rivet est, d'après (77),

$$\tau = \frac{3\,686\times 2}{3{,}14\times 6{,}25} = 376\ \text{bars}\,.$$

3. Déterminer $\sigma_{\max}$ aux points du plan ab (fig. 115) situé à 53,75 cm de l'axe neutre. Les dimensions de la poutre sont les mêmes que dans le problème précédent, $V = 675$ kN et le moment fléchissant $M = 337\,500$ m · N.

Solution. D'après l'équation (78) :

$$\tau_{yz} = \frac{67\,500}{1{,}9\times 860\,348}\cdot\frac{4}{3}(4\,698+966) = 312\ \text{bars}\,,$$

$$\sigma_z = \frac{33\,750\times 537{,}5}{860\,348} = 211\ \text{bars}\,,$$

$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma_z}{2} + \sqrt{\frac{\sigma_z^2}{4} + \tau_{zy}^2} = 435\ \text{bars}\,.$$

4. Déterminer l'effort tranchant dans les rivets d'assemblage des deux rails de la poutre de la figure 116. L'aire de la section d'un rail est $A = 62{,}50$ cm², le centre de gravité de cette section se trouve à $c = 7{,}5$ cm de la base du rail, le moment d'inertie de la section du rail, par rapport à l'axe passant par son centre de gravité c et parallèle à l'axe z, est 1 562,5 cm⁴, l'espacement des rivets $e = 15$ cm, l'effort tranchant $V = 22{,}5$ kN.

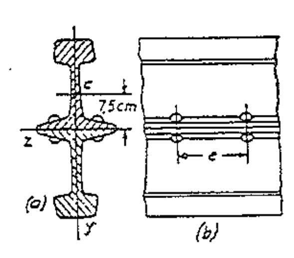


FIG. 116.

Solution. $$S = \frac{1}{2}\cdot\frac{2\,250\times 15\times 62{,}5\times 7{,}5}{2(1\,562{,}5+62{,}5\times 7{,}5^2)} = 779\ \text{daN}\,.$$

5

FLÈCHES DES POUTRES SYMÉTRIQUES CHARGÉES TRANSVERSALEMENT

31. Équation différentielle de la ligne élastique

L'ingénieur s'intéresse non seulement aux contraintes provoquées par des charges sur une poutre mais aussi aux flèches produites par ces charges. Souvent d'ailleurs, il est spécifié que la flèche maximum ne doit pas excéder une faible fraction de la portée.

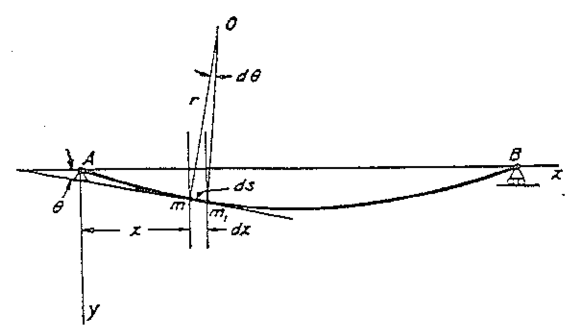
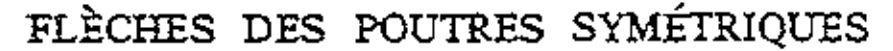


FIG. 117.

Soit AmB (fig. 117) l'allure de l'axe de la poutre après flexion. Cette flexion se produit dans le plan de symétrie, elle est due aux efforts transversaux s'exerçant dans le plan. Cette courbe est appelée *ligne élastique*. On établit l'équation différentielle de cette courbe en prenant les axes de coordonnées indiqués sur la figure, et l'on suppose que la courbure de la ligne élastique ne dépend, en un point quelconque, que de la valeur du moment fléchissant M en ce point [1]. Dans ce cas la relation entre courbure

[1] On étudiera plus loin (§ 39) l'influence de l'effort tranchant sur la courbure. On démontrera que cette influence est généralement faible et, de ce fait, négligeable.



et moment fléchissant est la même que dans le cas de la flexion pure (voir éq. 56) et l'on obtient

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{EI_z}. \qquad (a)$$

Pour exprimer la relation entre courbure et forme de la courbe, considérons deux points adjacents m, m_1 de la ligne élastique distants de ds. Si θ est l'angle que la tangente en m à la courbe fait avec l'axe x, dθ désigne alors l'angle des normales à la ligne élastique en m et m_1. Le point d'intersection O de ces normales donne le centre de courbure et définit la longueur r du rayon de courbure. Par suite,

$$\mathrm{d}s = r\mathrm{d}\theta \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{r} = \left|\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\right|. \qquad (b)$$

En ce qui concerne le signe, on remarquera que le moment fléchissant est positif dans l'équation (a) s'il provoque une concavité dirigée vers le haut (voir p. 73). Par suite, la courbure est positive lorsque le centre de courbure est au-dessus de la courbe, comme sur la figure 117. Toutefois, on constate aisément que pour une telle courbure l'angle θ décroît lorsque le point m se déplace sur la ligne élastique de A vers B. Donc, à un accroissement positif ds correspond un angle dθ négatif. Ainsi on détermine le signe adéquat en écrivant (b) sous la forme :

$$\frac{1}{r} = -\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}. \qquad (c)$$

On ne tolère, en pratique, que de très faibles flèches des poutres, de sorte que les lignes élastiques sont très plates. Dans ce cas on suppose, avec une exactitude suffisante, que

$$\mathrm{d}s \approx \mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad \theta \approx \mathrm{tg}\,\theta = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x. \qquad (d)$$

Substituons ces valeurs approchées de ds et θ dans (c), nous obtenons

$$\frac{1}{r} = -\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}. \qquad (e)$$

L'équation (a) s'écrit donc

$$EI_z \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = -M. \qquad (79)$$

C'est l'équation différentielle de la ligne élastique que l'on intègre dans chaque cas particulier afin de déterminer les flèches des poutres.

On notera que le signe de (79) dépend de l'orientation des axes de coordonnées. Par exemple, si l'on prend y positif vers le haut, il faudra poser

$$\theta \approx -\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$$

dans l'équation (d) et le second membre de l'équation (79) change de signe.

Dans le cas de barres très élancées, dont les flèches peuvent être importantes, il n'est pas possible d'utiliser les équations simplificatrices (d) et l'on aura recours à l'expression exacte

$$\theta \approx \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right).$$

Par suite,

$$\frac{1}{r} = -\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} = -\frac{\mathrm{d}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}$$

$$= -\frac{\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}}{\left[1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]^{3/2}}. \qquad (f)$$

Comparons ce résultat à l'équation (e), on conclut que les simplifications (d) laissent supposer que la quantité ($\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$), se trouvant au dénominateur de (f), est petite par rapport à l'unité et est donc négligeable (²).

Dérivons l'équation (79) par rapport à x et utilisons (50) et (51), il vient

$$EI_z\frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}x^3} = -V$$

et

$$EI_z\frac{\mathrm{d}^4 y}{\mathrm{d}x^4} = q. \qquad (80)$$

On se sert parfois de cette dernière équation dans l'étude de la flèche des poutres soumises à une charge répartie.

(²) L'expression exacte (f) de la courbure fut utilisée dans les premières recherches sur les lignes élastiques. L. Euler l'utilisa dans son célèbre ouvrage *Courbes élastiques*, publié en anglais dans *Isis*, vol. 20, p. 1, novembre 1933. Voir aussi S. Timoshenko, *History of Strength of Materials*, p. 32, New York, 1953.

32. Flexion d'une poutre uniformément chargée

Dans le cas d'une *poutre en appui simple et uniformément chargée*, figure 68, le moment fléchissant d'une section quelconque mn, à une distance x de l'appui gauche, est

$$M = \frac{qlx}{2} - \frac{qx^2}{2},$$

et l'équation différentielle (79) devient

$$EI_z\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{qlx}{2} + \frac{qx^2}{2}.$$

Multiplions les deux membres par $\mathrm{d}x$ et intégrons, il vient

$$EI_z\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{qlx^2}{4} + \frac{qx^3}{6} + C, \qquad (a)$$

où C est la constante d'intégration que l'on choisit de manière à satisfaire aux conditions particulières du problème. A cet effet, on remarque que par raison de symétrie la pente à mi-portée est nulle. Soit $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 0$ pour $x = l/2$, on obtient donc

$$C = \frac{ql^3}{24},$$

et l'équation (a) s'écrit

$$EI_z\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{qlx^2}{4} + \frac{qx^3}{6} + \frac{ql^3}{24}. \qquad (b)$$

Une seconde intégration donne

$$EI_z y = -\frac{qlx^3}{12} + \frac{qx^4}{24} + \frac{ql^3 x}{24} + C_1. \qquad (c)$$

On détermine la nouvelle constante d'intégration C_1 par la condition suivant laquelle la flèche sur les appuis est nulle. Substituons $y = 0$, $x = 0$ dans (c), nous trouvons $C_1 = 0$. Finalement (c) devient

$$y = \frac{q}{24\,EI_z}(l^3 x - 2\,lx^3 + x^4). \qquad (81)$$

C'est l'équation de la ligne élastique d'une poutre en appui simple, unifor-

mément chargée. La flèche maximum de cette poutre se situe évidemment au milieu de la portée. Remplaçons x par $l/2$ dans (81), il vient

$$y_{max} = \frac{5}{384}\frac{ql^4}{EI_z}. \quad (82)$$

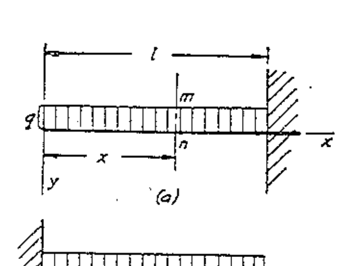


Fig. 118.

La pente maximum se situe à l'extrémité gauche de la poutre où nous obtenons, en faisant $x = 0$ dans l'équation (b),

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{max} = \frac{ql^3}{24\,EI_z}. \quad (83)$$

Dans le cas d'une *poutre cantilever uniformément chargée*, figure 118a, le moment fléchissant de la section mn, à une distance x de l'extrémité gauche, est

$$M = -\frac{qx^2}{2},$$

et l'équation (79) devient

$$EI_z\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{qx^2}{2}.$$

La première intégration donne

$$EI_z\frac{dy}{dx} = \frac{qx^3}{6} + C. \quad (d)$$

On calcule la constante d'intégration en supposant que la pente est nulle sur l'extrémité encastrée, c'est-à-dire, $dy/dx = 0$ pour $x = l$. Substituons ces valeurs dans (d), nous trouvons

$$C = -\frac{ql^3}{6}.$$

La seconde intégration donne

$$EI_z y = \frac{qx^4}{24} - \frac{ql^3x}{6} + C_1. \quad (e)$$

La constante C_1 se détermine par la condition suivant laquelle la flèche disparaît sur l'extrémité encastrée. Donc, en faisant $x = l$, $y = 0$ dans (e), on peut écrire

$$C_1 = \frac{ql^4}{8}.$$

D'où l'équation complète (e) :

$$y = \frac{q}{24\,EI_z}(x^4 - 4\,l^3x + 3\,l^4). \quad (84)$$

Elle définit la ligne élastique d'une poutre cantilever uniformément chargée.

Si l'on encastre l'extrémité gauche au lieu de la droite, comme sur la figure 118b, on définit la ligne élastique en remplaçant x par $l-x$ dans (84). On trouve, dans ce cas,

$$y = \frac{q}{24\,EI_z}(x^4 - 4\,lx^3 + 6\,l^2x^2). \quad (85)$$

Problèmes

1. Une poutre I en acier, uniformément chargée et en appui sur ses extrémités, présente en son milieu une flèche $\delta = 7{,}8$ mm, tandis que la pente de la ligne élastique est $\theta = 0{,}01$ radian à l'extrémité. Déterminer la hauteur h de la poutre, sachant que la contrainte de flexion maximum est $\sigma = 1\,260$ bars.

Solution. Nous avons les formules connues :

$$\delta = \frac{5}{384}\frac{ql^4}{EI_z}, \qquad \theta = \frac{ql^3}{24\,EI_z}, \qquad \sigma_{max} = \frac{ql^2}{8}\frac{h}{2\,I_z}.$$

Les deux premières donnent

$$\frac{5}{16}l = \frac{\delta}{\theta} = 78\text{ cm} \quad \text{et} \quad l = 2{,}5\text{ cm}.$$

La seconde expression s'écrit

$$\frac{ql^2}{8\,I_z} = \frac{3\,E\theta}{l} = \frac{3\times 21\times 10^5\times 10^{-2}}{25\times 10}.$$

Remplaçons dans la troisième formule, nous obtenons

$$h = \frac{2\times 1\,260\times 25\times 10}{3\times 21\times 10^5\times 10^{-2}} = 10\text{ cm}.$$

2. Une poutre en bois de section carrée, en appui simple et chargée uniformément, a une portée $l = 3$ m. Calculer la flèche maximum, sachant que $(\sigma_x)_{max} = 70$ bars, $E = 1{,}05\times 10^5$ bars et $q = 595$daN/m.

Réponse. $\delta = 5{,}3$ mm.

3. Calculer la hauteur d'une poutre en I, chargée uniformément et en appui simple, dont la portée est de 3 m, la contrainte de flexion maximum est 1125 bars et la flèche maximum $\delta = 0{,}25$ cm.

Réponse. $h = 406$ mm.

4. Calculer la pente de la ligne élastique à l'extrémité d'une poutre cantilever, chargé uniformément, dont la portée est l et la flèche à l'extrémité $0{,}01\,l$.

Réponse. $\theta = 0{,}013\,3$ radian.

5. Quelle est la longueur d'une poutre cantilever subissant une charge uniforme, lorsque la flèche à l'extrémité libre est 2,5 cm et la pente de la ligne élastique au même point 0,01 ?

Réponse. $l = 3{,}4$ m.

33. Flèche d'une poutre en appui simple soumise à une charge concentrée

Dans ce cas il existe deux expressions différentes du moment fléchissant (voir § 22) correspondant aux deux tronçons de la poutre, figure 119.

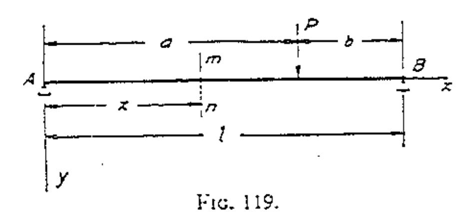


FIG. 119.

On écrit donc l'équation (79) de la ligne élastique pour chaque portion de la courbe. Nous avons alors

$$EI_z \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{Pb}{l}x \qquad \text{pour} \qquad x \leqslant a,$$

et

$$EI_z \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{Pb}{l}x + P(x-a) \qquad \text{pour} \qquad x \geqslant a.$$

Intégrons ces équations, il vient

$$EI_z \frac{dy}{dx} = -\frac{Pbx^2}{2l} + C \qquad \text{pour} \qquad x \leqslant a$$

et

$$EI_z \frac{dy}{dx} = -\frac{Pbx^2}{2l} + \frac{P(x-a)^2}{2} + C_1 \qquad \text{pour} \qquad x \geqslant a. \qquad (a)$$

Puisque les deux branches de la ligne élastique ont une tangente commune au point d'application de la charge P, les expressions (a) de la pente sont égales pour $x = a$. L'on conclut que les constantes d'intégration C et C_1 sont égales. Poursuivons l'intégration et remplaçons C_1 par C, nous obtenons

$$EI_z y = -\frac{Pbx^3}{6l} + Cx + C_2 \qquad \text{pour} \qquad x \leqslant a$$

et

$$EI_z y = -\frac{Pbx^3}{6l} + \frac{P(x-a)^3}{6} + Cx + C_3 \qquad \text{pour} \qquad x \geqslant a. \qquad (b)$$

Pour la même raison que précédemment, les expressions (b) sont identiques pour $x = a$, et il s'ensuit que $C_2 = C_3$. Finalement, il suffit de déterminer les constantes C et C_2. Pour cela nous avons une double condition qui exprime l'absence de flèches aux deux extrémités de la poutre. Remplaçons x et y par zéro dans la première des expressions (b), il vient

$$C_2 = C_3 = 0. \qquad (c)$$

Faisons $y = 0$, $x = l$ dans la seconde expression (b), nous obtenons

$$C = \frac{Pbl}{6} - \frac{Pb^3}{6l} = \frac{Pb(l^2 - b^2)}{6l}. \qquad (d)$$

Substituons les valeurs (c) et (d) des constantes dans les équations (b) de la ligne élastique, on écrit alors

$$EI_z y = \frac{Pbx}{6l}(l^2 - b^2 - x^2) \qquad \text{pour} \qquad x \leqslant a, \qquad (86)$$

et

$$EI_z y = \frac{Pbx}{6l}(l^2 - b^2 - x^2) + \frac{P(x-a)^3}{6} \qquad \text{pour} \qquad x \geqslant a. \qquad (87)$$

La première de ces expressions donne les flèches du tronçon gauche de la poutre et la seconde celles du tronçon droit.

Remplaçons C par sa valeur (d) dans (a), il vient

$$\left.\begin{aligned} EI_z \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{Pb}{6l}(l^2 - b^2 - 3x^2) && \text{pour} \quad x \leqslant a \\ \text{et} \quad EI_z \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{Pb}{6l}(l^2 - b^2 - 3x^2) + \frac{P(x-a)^2}{2} && \text{pour} \quad x \geqslant a\,. \end{aligned}\right\} \quad (e)$$

A l'aide de ces équations on détermine la pente de la ligne élastique en un point quelconque. Il est souvent utile de connaître la valeur des pentes aux extrémités d'une poutre. Faisons $x = 0$ dans la première des équations (e), $x = l$ dans la seconde et représentons les pentes aux extrémités correspondantes par θ_1 et θ_2, nous obtenons [3] :

$$\theta_1 = \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_{x=0} = \frac{Pb(l^2 - b^2)}{6\,lEI_z}, \tag{88}$$

$$\theta_2 = \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_{x=l} = -\frac{Pab(l+a)}{6\,lEI_z}. \tag{89}$$

La flèche maximum se développe au point où la tangente à la ligne élastique est horizontale. Si $a > b$, cas de la figure 119, la flèche maximum se trouve évidemment dans le tronçon gauche de la poutre. On détermine la position de ce point en égalant à zéro la première des expressions (e) :

$$l^2 - b^2 - 3x^2 = 0\,,$$

d'où

$$x = \frac{\sqrt{l^2 - b^2}}{\sqrt{3}}. \tag{f}$$

C'est la distance de l'appui gauche au point correspondant à la flèche maximum. Pour calculer la flèche maximum même, on porte l'expression (f) dans (86), ce qui donne

$$y_{\max} = \frac{Pb(l^2 - b^2)^{3/2}}{9\sqrt{3}\,lEI_z}. \tag{g}$$

Sachant que la charge P est appliquée à mi-portée, la flèche maximum se situe évidemment au milieu. On obtient sa valeur en remplaçant b par $l/2$ dans l'équation (g), d'où

$$(y)_{\substack{x=l/2\\a=b}} = \frac{Pl^3}{48\,EI_z}. \tag{90}$$

[3] Pour les courbes très ouvertes, fréquemment rencontrées, les pentes θ_1 et θ_2 sont égales, en valeur absolue, aux angles de rotation des extrémités de la poutre pendant la flexion ; ces angles étant positifs lorsque la rotation s'effectue dans le sens des aiguilles d'une montre.

On conclut d'après (f) que dans le cas d'un effort concentré la flèche maximum est toujours aux environs du milieu de la poutre. Lorsque $b = l/2$ elle est au milieu ; dans le cas limite, pour b très petit et P près d'un appui, la distance x donnée par (f) est $l/\sqrt{3}$, et le point correspondant à la flèche maximum se trouve seulement à

$$\frac{l}{\sqrt{3}} - \frac{l}{2} = 0{,}077\,l$$

du milieu de la poutre. Il en résulte que la flèche au milieu de la portée est très approchée de la flèche maximum. On obtient la flèche au milieu en faisant $x = l/2$ dans (86), d'où

$$(y)_{\substack{x=l/2\\a>b}} = \frac{Pb}{48\,EI_z}(3\,l^2 - 4\,b^2)\,. \tag{91}$$

La différence entre les flèches (g) et (91), dans le cas le plus défavorable, c'est-à-dire lorsque b tend vers zéro, n'est que de l'ordre de 2,5 pour cent de la flèche maximum.

Problèmes

1. Déterminer la position de la charge P, figure 119, si le rapport des valeurs absolues des pentes aux extrémités de la poutre est $|\theta_1/\theta_2| = 3/4$.

Réponse. $a = \frac{5}{7}\,l$.

2. Quelle est la différence entre la flèche maximum et celle à mi-portée de la poutre de la figure 119, pour $b = 2a$.

Réponse. $0{,}0046\,\dfrac{Pl^3}{27\,EI_z}$.

3. Calculer la flèche maximum de la poutre représentée sur la figure 119, sachant que cette poutre est constituée par un profilé IPN de 200 mm de hauteur, pesant 26,3 daN/m (voir appendice), dont l'épaisseur est $e = 7{,}5$ mm et la section 33,5 cm². On prendra $a = 3{,}60$ m, $b = 2{,}40$ m et $P = 10$ kN.

4. Quelle sera la flèche maximum de la poutre précédente si elle était en bois, de section 25×25 cm ? On prendra pour module d'élasticité du bois $E = 1{,}05 \times 10^5$ bars.

34. Détermination des flèches à l'aide du diagramme du moment fléchissant

Méthode du moment des aires. Nous avons vu, dans les paragraphes précédents, comment déterminer la ligne élastique d'une poutre par intégration de l'équation différentielle (79). Toutefois, dans plusieurs cas et particulièrement si l'on recherche la flèche en un point précis plutôt que l'équation générale de la ligne élastique, on simplifie les calculs en utilisant le diagramme du moment fléchissant, suivant la méthode décrite ci-dessous [4].

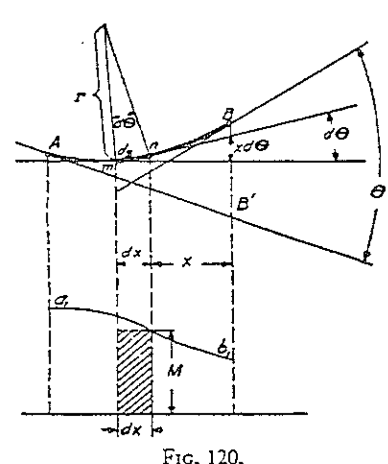


Fig. 120.

Sur la figure 120, AB représente une partie de la ligne élastique d'une poutre et a_1b_1 la portion correspondante du diagramme du moment fléchissant. Deux sections adjacentes distantes de ds se coupent, après flexion, sous un angle $d\theta$ et, d'après l'équation (56),

$$d\theta = \frac{1}{r}\,ds = \frac{M}{EI_z}\,ds\,.$$

Pour les poutres utilisées en construction la courbure est très faible et l'on utilise dx au lieu de ds. D'où

$$d\theta = \frac{M}{EI_z}\,dx\,. \qquad (a)$$

L'interprétation graphique signifie que l'angle élémentaire $d\theta$ entre deux rayons consécutifs ou deux tangentes consécutives, à la ligne élastique, est égal au rapport de l'aire élémentaire hachurée Mdx, du diagramme du

[4] Cette méthode est due à O. Mohr, voir *Z. Architekt. u. Ing. Ver.*, p. 10, 1868, Hanovre ; voir aussi *Abhandlungen*, p. 294 ; *loc. cit.* p. 40. Une méthode identique fut développée indépendamment par le Professeur C. E. Green, Université du Michigan, 1874. Il semble que le promoteur de cette méthode fut Saint-Venant. Voir ses notes dans l'ouvrage de Navier, pp. 72 et 79 ; *loc. cit.* p. 100.

moment fléchissant, à la rigidité à la flexion [5]. Ceci étant vrai pour chaque élément, on obtient l'angle θ par sommation des éléments tels que celui donné par l'équation (a). Par suite,

$$\theta = \int_A^B \frac{1}{EI_z}\,M dx\,, \qquad (92)$$

c'est-à-dire que l'angle entre les tangentes aux points A et B de la ligne élastique est égal à l'aire du diagramme du moment fléchissant, comprise entre les ordonnées correspondantes, divisée par la rigidité à la flexion de la poutre.

Considérons alors la distance séparant le point B de la ligne élastique de la tangente AB au point A. Puisqu'une ligne élastique est très aplatie, cette distance se mesure suivant BB'. La part de cette distance, qui revient à la flexion d'un élément mn de la poutre comprise entre les deux tangentes consécutives en m et n, est égale à

$$x d\theta = x\,\frac{M dx}{EI_z}\,.$$

Du point de vue graphique, cette expression représente le moment de l'aire hachurée Mdx par rapport à la verticale B, divisée par EI_z. L'intégration donne la flèche totale BB' :

$$\overline{BB'} = \delta = \int_A^B \frac{1}{EI_z}\,x M dx\,, \qquad (93)$$

c'est-à-dire que la distance entre B et la tangente en A est égale au moment, par rapport à l'ordonnée de B, divisé par la rigidité à la flexion EI_z. On calcule, dans chaque cas particulier, la pente de la ligne élastique et la valeur de la flèche en une section quelconque à l'aide des équations (92) et (93). On calcule d'abord les valeurs absolues de θ et δ. Puis choisissant les directions positives des axes des coordonnées (voir fig. 122), on considère comme positive la rotation d'une tangente à la ligne élastique lorsqu'elle s'opère dans le sens des aiguilles d'une montre, et la flèche de la poutre, positive, si elle est dirigée vers l'axe des y positifs. Cette méthode de calcul des flèches s'appelle *méthode du moment des aires.*

[5] Du point de vue dimensionnel, $d\theta$ exprimé en radians est un nombre pur, Mdx s'exprime en $N \cdot cm \cdot cm$ et EI_z en $(N/cm^2)\,cm^4$.

Le calcul des intégrales (92) et (93) se simplifie par l'emploi de formules connues relatives aux aires et aux centres de gravité. Les formules le plus souvent employées sont représentées sur la figure 121.

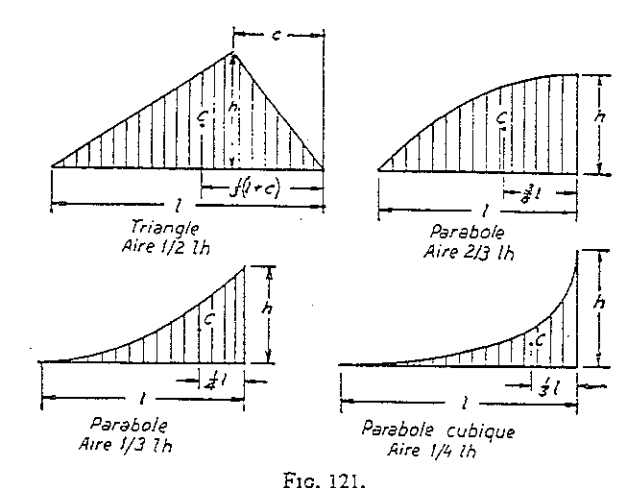


Fig. 121.

35. Flèche d'une poutre cantilever déterminée par la méthode du moment des aires

Dans le cas d'une poutre cantilever soumise à une charge concentrée sur son extrémité (fig. 122*a*), le diagramme du moment fléchissant est représenté sur la figure 122*b*. Comme la tangente à l'extrémité encastrée A

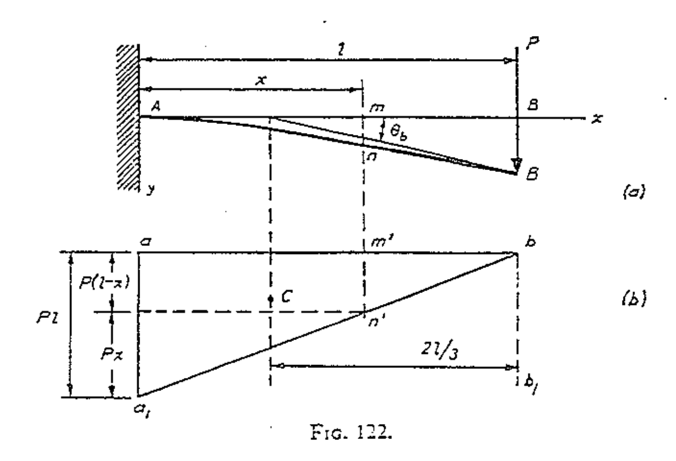


Fig. 122.

reste fixe, les ordonnées des points de la ligne élastique, comptées à partir de cette tangente, représentent les flèches réelles. L'angle θ_b que la tangente à ligne élastique en B fait avec la tangente A est, d'après (92) [6],

$$\theta_b = Pl \times \frac{l}{2} \times \frac{1}{EI_z} = \frac{Pl^2}{2\,EI_z}. \tag{94}$$

On calcule la flèche δ par l'équation (93) en divisant par EI_z le moment de l'aire aba_1 par rapport à l'axe bb_1. D'où

$$\delta = Pl \times \frac{l}{2} \times \frac{2}{3}\,l \times \frac{1}{EI_z} = \frac{Pl^3}{3\,EI_z}. \tag{95}$$

Pour une section quelconque mn, la déformation angulaire, comptée à partir de l'axe x, est égale à l'aire $m'n'aa_1$ de la figure 122*b* divisée par EI_z. Dans le cas de courbes plates, telles que les lignes élastiques des poutres, on assimile la déformation angulaire à la pente de la courbe, nous obtenons

$$\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{Pl^2}{2\,EI_z}\left[1 - \frac{(l-x)^2}{l^2}\right]. \tag{96}$$

La flèche y de la section considérée est égale au moment de l'aire $m'n'aa_1$, par rapport à $m'n'$, divisé par EI_z (voir éq. 93). Décomposons cette aire suivant un rectangle et un triangle comme indiqué sur la figure, nous trouvons

$$y = \frac{1}{EI_z}\left[P(l-x)\frac{x^2}{2} + \frac{Px^2}{2}\frac{2x}{3}\right] = \frac{P}{EI_z}\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right). \tag{97}$$

Dans le cas d'une poutre cantilever supportant une charge concentrée P appliquée sur une section située à la distance c de l'encastrement (fig. 123*a*), le diagramme du moment fléchissant prend la forme indiquée sur la figure 123*b*. La pente et la flèche d'une section quelconque, située à gauche du point d'application de la charge, sont données par les équations (96) et (97) dans lesquelles on remplace l par c. Pour toute section à droite de la charge le moment fléchissant et la courbure sont nuls, par suite ce tronçon de la poutre reste droit. La

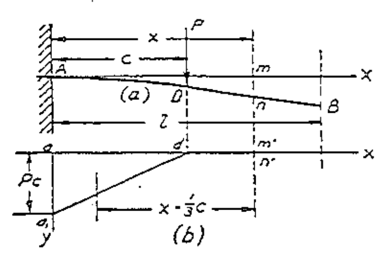


Fig. 123.

[6] Cet angle est positif puisque la rotation s'effectue dans le sens des aiguilles d'une montre.

pente est constante et égale à celle en D, c'est-à-dire à $Pc^2/2EI_z$ d'après (94). La flèche d'une section quelconque mn est égale au moment de l'aire du triangle aa_1d, par rapport à $m'n'$, divisé par EI^z, ce qui donne

$$y = \frac{1}{EI_z}\frac{Pc^2}{2}\left(x - \frac{1}{3}c\right). \qquad (98)$$

Dans le cas d'une poutre cantilever sollicitée par une charge uniforme q (fig. 124a), le moment fléchissant d'une section mn, située à la distance x_1 de l'extrémité encastrée, est

$$M = -\frac{q\,(l-x_1)^2}{2}.$$

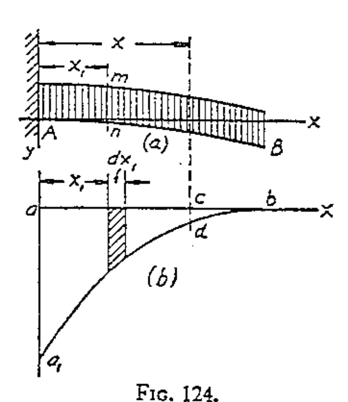


Fig. 124.

On le représente par la parabole a_1db de la figure 124b. La pente d'une section située à une distance x de l'encastrement est, d'après (92),

$$\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{EI_z}\int_0^x \frac{q\,(l-x_1)^2}{2}\,dx_1 = \frac{q}{2\,EI_z}\left(l^2x - lx^2 + \frac{x^3}{3}\right). \qquad (99)$$

On obtient la pente de l'extrémité en substituant l à x dans l'équation ci-dessus, d'où

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=l} = \frac{ql^3}{6\,EI_z}. \qquad (100)$$

La flèche d'une section distante de x de l'extrémité encastrée est égale au moment de l'aire aa_1cd, par rapport à cd, divisé par EI_z (fig. 124b). Le moment de l'élément de cette aire, hachuré sur la figure, est

$$(x-x_1)\frac{q\,(l-x_1)^2}{2}\,dx_1.$$

Le moment total est donc l'intégrale, par rapport à x_1, prise entre les limites $x_1 = 0$, $x_1 = x$. Par suite,

$$y = \frac{1}{EI_z}\frac{q}{2}\int_0^x (x-x_1)\,(l-x_1)^2\,dx_1.$$

La flèche en un point quelconque à une distance x de l'appui est alors, après intégration,

$$y = \frac{q}{2\,EI_z}\left(\frac{l^2x^2}{2} - \frac{lx^3}{3} + \frac{x^4}{12}\right). \qquad (101)$$

Nous avons, pour la flèche à l'extrémité $x = l$,

$$\delta = (y)_{x=l} = \frac{ql^4}{8\,EI_z}. \qquad (102)$$

Ce même problème peut être résolu par la méthode de superposition. On considère la charge uniforme comme étant composée d'un système de charges infinitésimales $q\mathrm{d}c$ (voir fig. 140).

Problèmes

1. Déterminer la déformation au sommet de la pile de la figure 98.

Solution. Le moment fléchissant d'une section mn, située à une distance x du sommet, est

$$M = -\frac{Wx^3}{3\,l^2},$$

$W = \frac{1}{2}dl^2 \times 10\ \mathrm{kN/m^3}$ est la pression hydrostatique totale transmise à une pile. Utilisons l'équation (93), la déformation au sommet de la pile est

$$\delta = \frac{W}{EI_z}\int_0^l \frac{x^4\,dx}{3\,l^2}$$

$$= \frac{Wl^3}{15\,EI_z} = \frac{0{,}9\times 18^2\times 10^3\times 180^3\times 12}{2\times 15\times 1\,050\times 247^4} = 1{,}74\ \mathrm{mm}.$$

2. Déterminer la flèche et la pente à l'extrémité d'une poutre cantilever fléchie par un couple M (fig. 125).

Réponse. $(y)_{x=l} = -\dfrac{Ml^2}{2\,EI_z}$, $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{x=l} = -\dfrac{Ml}{EI_z}$.

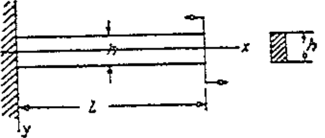


Fig. 125.

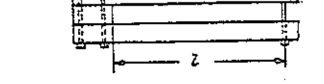


Fig. 126.

3. Deux poutres rectangulaires en bois, encastrées à leur extrémité gauche (fig. 126), sont fléchies par serrage du boulon placé à leur extrémité droite. Déterminer le diamètre d du boulon de façon que les coefficients de sécurité des poutres en bois et du boulon d'acier soient les mêmes. Longueur des poutres $l = 0,915$ m, hauteur $h = 20$ cm, largeur $b = 15$ cm, contrainte d'utilisation de l'acier $\sigma_w = 844$ bars, du bois $\sigma_w = 84,4$ bars. Calculer la flèche des poutres lorsque la traction dans le boulon est de 844 bars.

Solution. Soit P l'effort dans le boulon, son diamètre d est alors défini par la relation :

$$\frac{4P}{\pi d^2} \div \frac{6Pl}{bh^2} = \frac{844}{84,4} = 10,$$

d'où

$$d = 11,4 \text{ mm} \quad \text{et} \quad P = 844 \times \tfrac{1}{4}\pi d^2 = 861,4 \text{ daN}.$$

En prenant $E = 1,05 \times 10^5$ bars on obtient, d'après (95), la flèche $\delta = 2,16$ mm.

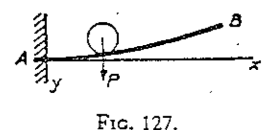


Fig. 127.

4. Quelle doit être l'équation de l'axe de la barre courbe AB, avant sa flexion, pour que la charge P qui se déplace le long de la barre reste toujours au même niveau (fig. 127) ?

Réponse. $y = -\dfrac{Px^3}{3EI_z}$.

5. Déterminer la flèche de sécurité de la poutre représentée sur la figure 125, lorsque la contrainte d'utilisation est connue. Etablir le même calcul pour une cantilever chargée en son extrémité (fig. 122).

Réponse. (1) $\delta = \dfrac{\sigma_W l^2}{Eh}$, (2) $\delta = \dfrac{2}{3}\dfrac{\sigma_W l^2}{Eh}$.

6. Un disque circulaire N de rayon R (fig. 128) exerce, sur une mince bande d'acier d'épaisseur h, une attraction de q bars uniformément répartie. Déterminer la longueur l de la partie AC, non appuyée, de la bande et la contrainte maximum qui y règne. On pose $h = 0,25$ mm, $R = 7,5$ cm et $q = 1,05$ bars.

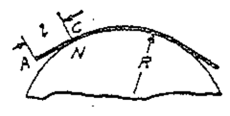


Fig. 128.

Solution. On détermine AC par la condition suivant laquelle la courbure en C, produite par la charge q uniformément répartie, est égale à $1/R$. Donc

$$\frac{ql^2}{2} = \frac{EI_z}{R},$$

d'où

$$l = \sqrt{\frac{2EI_z}{qR}} = 8,5 \text{ mm}.$$

On calcule la contrainte maximum par l'équation $\sigma_{max} = Eh/2R = 35$ hectobars.

36. Flèche d'une poutre en appui simple déterminée par la méthode du moment des aires

Considérons le cas d'une poutre en appui simple sollicitée par une charge P appliquée en F, figure 129. Le diagramme du moment fléchissant est constitué par le triangle $a_1b_1f_1$, figure 129b, dont l'aire est égale à

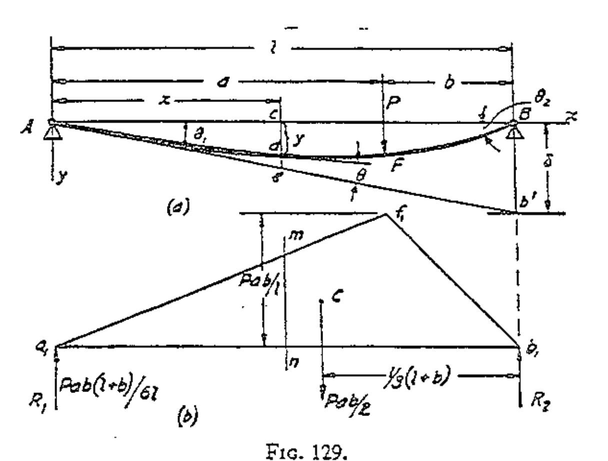


Fig. 129.

$Pab/2$ et le centre de gravité C situé à la distance $(l+b)/3$ de la verticale Bb_1. La distance verticale δ de l'extrémité B à la tangente Ab' à la ligne élastique en A s'obtient par l'équation (93):

$$\delta = \frac{1}{EI_z}\frac{Pab}{2} \times \frac{l+b}{3} = \frac{Pab(l+b)}{6EI_z}.$$

A l'aide de cette valeur on calcule la pente θ_1 à l'extrémité gauche de la poutre :

$$\theta_1 = \frac{\delta}{l} = \frac{Pab(l+b)}{6lEI_z}. \qquad (a)$$

Cette expression est identique à (88) (7). Pour calculer l'angle de rota-

(7) Remarquer que $a = l - b$.

tion θ_2 de l'extrémité B de la poutre (fig. 129*a*), remarquons que la rotation de cette extrémité par rapport à A est, d'après (92),

$$\theta = \frac{Pab}{2\,EI_z}.$$

Par suite,

$$\theta_2 = \theta_1 - \theta = \frac{Pab\,(l+b)}{6\,lEI_z} - \frac{Pab}{2\,EI_z} = -\,\frac{Pab\,(l+a)}{6\,lEI_z}. \qquad (b)$$

On interprète simplement les formules (*a*), (*b*) en considérant a_1b_1 (fig. 129*b*) comme une poutre en appui simple, supportant la charge triangulaire représentée par $a_1f_1b_1$. La réaction de l'appui gauche a_1 de cette poutre virtuelle est

$$R_1 = \frac{Pab}{2} \times \frac{l+b}{3} \times \frac{1}{l} = \frac{Pab\,(l+b)}{6\,l}.$$

De même,

$$R_2 = \frac{Pab\,(l+a)}{6\,l}.$$

En comparant ces résultats aux formules (*a*) et (*b*), on conclut que les angles de rotation θ_1 et θ_2 des extrémités de la poutre réelle AB s'obtiennent en divisant par la rigidité à la flexion EI_z les efforts tranchants aux extrémités de la poutre virtuelle a_1b_1. Cette dernière s'appelle *poutre conjuguée*.

Pour calculer la pente en un point d de la ligne élastique, figure 129*a*, il est nécessaire de soustraire l'angle θ, entre les tangentes en A et en d, de l'angle θ_1 à l'appui. Utilisons l'équation (92) pour la détermination de θ, nous obtenons, d'après la figure 129*b*,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \theta_1 - \theta = \frac{1}{EI_z}\,(R_1 - \Delta a_1 mn).$$

Le premier terme entre parenthèses désigne la réaction de l'appui gauche de la poutre conjuguée a_1b_1 et le second terme représente la charge de la poutre conjuguée à gauche de la section mn. L'expression entre parenthèses représente donc l'effort tranchant dans la section mn de la poutre conjuguée. Par conséquent, la pente de la poutre réelle, en un point d, s'obtient en divisant l'effort tranchant, dans la section correspondante de la poutre conjuguée, par la rigidité à la flexion EI_z.

Considérons alors la flèche y en un point d, on déduit de la figure 129*a*,

$$y = \overline{ce} - \overline{de}. \qquad (c)$$

Et le triangle Ace nous donne la relation :

$$\overline{ce} = \theta_1 x = \frac{R_1 x}{EI_z}, \qquad (d)$$

où R_1 est la réaction de l'appui gauche de la poutre conjuguée. Le second terme du second membre de (*c*) représente la distance séparant le point d, sur la ligne élastique, de la tangente Ae, on la détermine par l'équation (93) :

$$\overline{de} = \frac{1}{EI_z}(\text{aire } \Delta a_1 mn) \times \frac{x}{3}. \qquad (e)$$

Portons les expressions (*d*) et (*e*) dans (*c*), nous obtenons

$$y = \frac{1}{EI_z}\left(R_1 x - \Delta a_1 mn \times \frac{x}{3}\right). \qquad (f)$$

L'expression entre parenthèses représente le moment fléchissant dans la section mn de la poutre conjuguée. Donc, la flèche en un point quelconque d'une poutre en appui simple s'obtient en divisant le moment fléchissant dans la section correspondante de la poutre conjuguée par la rigidité à la flexion EI_z. Substituons la valeur de R_1 dans l'équation (*f*) et remarquons que

$$\text{aire } \Delta a_1 mn = \frac{Pbx^2}{2\,l},$$

nous obtenons

$$y = \frac{1}{EI_z}\left[\frac{Pabx\,(l+b)}{6\,l} - \frac{Pbx^3}{6\,l}\right] = \frac{Pbx}{6\,lEI_z}(l^2 - b^2 - x^2).$$

Ce résultat vérifie l'équation (86) précédemment obtenue par intégration de l'équation différentielle de la ligne élastique. La flèche d'un point à droite de la charge P se calcule de manière analogue. On trouve naturellement le résultat déjà fourni par l'équation (87). La méthode du moment des aires permet donc d'éliminer le processus d'intégration appliqué au paragraphe 33.

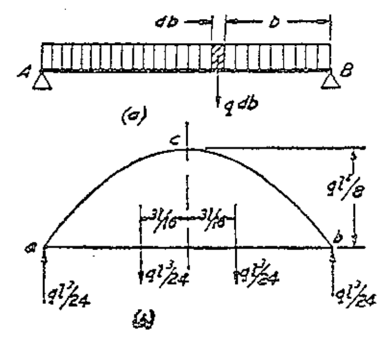


Fig. 130.

Dans le cas d'une poutre chargée uniformément, figure 130*a*, on considère la poutre conjuguée ab, figure 130*b*, subissant une charge répartie

paraboliquement suivant la courbe *acb* qui, dans ce cas, représente le diagramme du moment fléchissant. La charge totale fictive sur la poutre conjuguée est

$$\frac{2}{3} \times \frac{ql^2}{8} \times l,$$

et chaque réaction est égale à $ql^3/24$. La pente en l'extrémité A de la poutre s'obtient en divisant cette réaction par EI_z. Pour calculer la flèche au milieu, l'on utilise le moment fléchissant

$$\frac{ql^3}{24}\left(\frac{l}{2} - \frac{3\,l}{16}\right) = \frac{5\,ql^4}{384}$$

du milieu de la poutre conjuguée. On détermine alors la flèche en divisant ce moment par EI_z.

Dans le cas d'une poutre AB en appui simple, soumise à l'action d'un couple M à son extrémité, figure 131, le diagramme du moment fléchissant

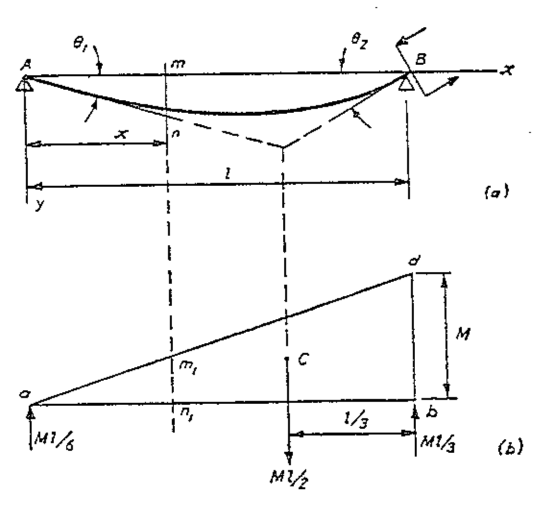


Fig. 131.

est le triangle *abd* de la figure 131*b*. Soit *ab* la poutre conjuguée, la charge totale fictive est $Ml/2$. Les réactions aux extrémités de la poutre conjuguée

sont donc $Ml/6$ et $Ml/3$. Par suite, les angles de rotation des extrémités de la poutre réelle sont

$$\theta_1 = \frac{Ml}{6\,EI_z} \tag{103}$$

et

$$\theta_2 = -\frac{Ml}{3\,EI_z}. \tag{104}$$

La flèche au droit d'une section *mn* de la poutre s'obtient en divisant le moment fléchissant, dans la section correspondante m_1n_1 de la poutre conjuguée, par EI_z, ce qui donne

$$y = \frac{1}{EI_z}\left(\frac{Ml}{6}x - \frac{Ml}{2}\cdot\frac{x^2}{l^2}\cdot\frac{x}{3}\right) = \frac{Mlx}{6\,EI_z}\left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right). \tag{105}$$

Problèmes

1. Déterminer les rotations aux extrémités et la flèche au droit des charges et à mi-portée de la poutre de la figure 132.

Solution. La poutre conjuguée est soumise à la charge trapézoïdale *adeb* dont l'aire est $Pc(l-c)$. Les rotations aux extrémités sont

$$\theta_1 = -\theta_2 = \frac{1}{EI_z}\,\frac{Pc\,(l-c)}{2}.$$

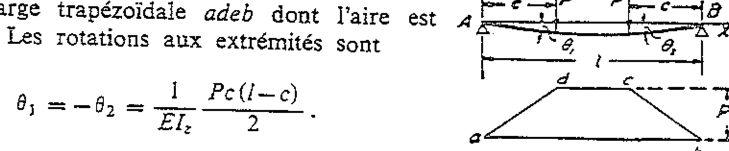


Fig. 132.

La flèche au droit des charges est

$$(y)_{x=c} = \frac{1}{EI_z}\left[\frac{Pc^2\,(l-c)}{2} - \frac{Pc^2}{2}\cdot\frac{c}{3}\right] = \frac{Pc^2}{EI_z}\left(\frac{l}{2} - \frac{2}{3}c\right).$$

D'après (91) la flèche à mi-portée est

$$(y)_{x=l/2} = \frac{Pc}{24\,EI_z}(3\,l^2 - 4\,c^2)\,;$$

2. Déterminer la pente aux extrémités de la poutre représentée sur la figure 92.

Réponse.

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = \frac{7}{180}\,\frac{Wl^2}{EI_z}, \qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=l} = -\frac{2}{45}\,\frac{Wl^2}{EI_z},$$

où W caractérise la pression totale sur la poutre.

3. Une poutre AB en appui simple est sollicitée comme l'indique la figure 133. Trouver la flèche au centre de la poutre et la flèche maximum ; calculer les pentes aux extrémités de la poutre.

Réponse.

$$(\delta)_{x=l/2} = 0\,, \quad \delta_{\max} = \frac{2\sqrt{2}\,Pl^3}{(27)^2\sqrt{3}\,EI_z}\,, \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=l} = \frac{Pl^2}{81\,EI_z}.$$

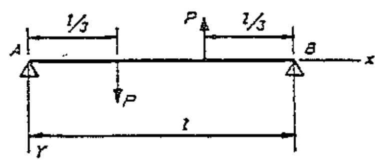


Fig. 133.

4. Déterminer les angles θ_1 et θ_2, et la flèche en une section quelconque *mn* d'une poutre en appui simple sur ses extrémités et soumise à un couple *Pc* (fig. 134).

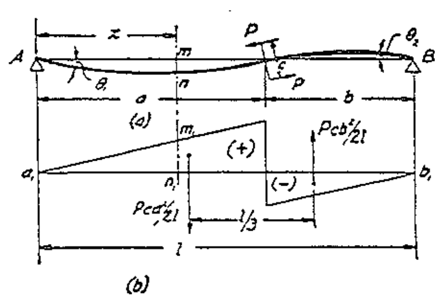


Fig. 134.

Solution. La figure 134*b* représente la sollicitation de la poutre conjuguée. Les réactions en $a_1 b_1$ sont :

$$R_a = \frac{1}{l}\left[\frac{Pca^2}{2l}\left(b + \frac{a}{3}\right) - \frac{Pcb^2}{2l}\cdot\frac{2}{3}b\right],$$

$$R_b = \frac{1}{l}\left[\frac{Pca^2}{2l}\frac{2a}{3} - \frac{Pcb^2}{2l}\left(a + \frac{b}{3}\right)\right].$$

Donc,

$$\theta_1 = \frac{Pc}{2l^2EI_z}\left[a^2\left(b + \frac{a}{3}\right) - \frac{2}{3}b^3\right] = \frac{Pc}{2lEI_z}\left(\frac{l^2}{3} - b^2\right),$$

$$\theta_2 = -\frac{Pc}{2l^2EI_z}\left[\frac{2}{3}a^3 - b^2\left(a + \frac{b}{3}\right)\right] = \frac{Pc}{2lEI_z}\left(\frac{l^2}{3} - a^2\right).$$

Si $a = b = l/2$, nous obtenons

$$\theta_1 = \theta_2 = \frac{Pcl}{24\,EI_z}.$$

Si $a > l/\sqrt{3}$, l'angle θ_2 change de signe et la flèche est partout dirigée vers le bas. Le moment fléchissant d'une section m_1n_1 de la poutre conjuguée est

$$R_a x - \frac{Pca^2}{2l}\frac{x^2}{a^2}\frac{x}{3} = \frac{Pcx}{2l^2}\left[a^2\left(b + \frac{a}{3}\right) - \frac{2}{3}b^3\right] - \frac{Pcx^3}{6l}.$$

Donc, la ligne élastique de la partie gauche de la poutre réelle est

$$y = \frac{Pcx}{2l^2EI_z}\left[a^2\left(b + \frac{a}{3}\right) - \frac{2}{3}b^3\right] - \frac{Pcx^3}{6lEI_z}.$$

5. Une poutre est fléchie par deux couples, comme l'indique la figure 135. Déterminer le rapport $M_1 : M_2$, sachant que le point d'inflexion se situe à la distance $l/3$ de l'appui gauche.

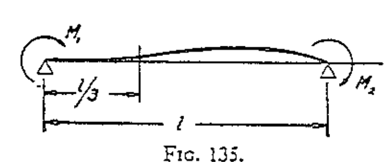


Fig. 135.

Réponse. $M_2 = 2\,M_1$.

6. Deux planches d'épaisseurs différentes h_1 et h_2, reposant l'une sur l'autre, supportent une charge uniformément répartie (fig. 136). Déterminer le rapport des contraintes maximums que chacune d'elles subit.

Solution. Les deux planches ont même ligne élastique et même courbure, par suite, leurs moments fléchissants sont dans le même rapport que les moments d'inertie de leurs sections, c'est-à-dire, dans le rapport $h_1^3 : h_2^3$. Les modules de section sont dans le rapport $h_1^2 : h_2^2$, par suite, les contraintes maximums sont dans le rapport $h_1 : h_2$.

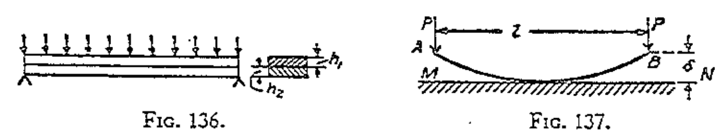


Fig. 136. Fig. 137.

7. Une barre d'acier *AB* possède une telle courbure initiale qu'après aplatissement par les forces *P* (fig. 137), elle produit une pression uniformément répartie sur la longueur de la surface plane rigide *MN*. Calculer les forces *P* nécessaires à l'aplatissement de la barre et la contrainte maximum qu'elle subit. On pose $l = 50$ cm, $\delta = 0{,}25$ cm et la section de la barre est un carré de 2,5 cm de côté.

Solution. Pour obtenir une pression répartie uniformément, la courbure initiale de la barre doit être la même que celle de la ligne élastique d'une poutre en appui simple supportant une charge uniformément répartie d'intensité $2P/l$. Nous obtenons alors :

$$M_{\max} = \frac{2P}{l}\frac{l^2}{8} = \frac{Pl}{4}, \qquad (g)$$

$$\delta = \frac{5}{384} \times \frac{2P}{l} \times \frac{l^4}{EI_z}. \qquad (h)$$

La contrainte maximum est

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{Z} = \frac{Plh}{8\,I_z}. \qquad (i)$$

Enfin, d'après (*h*) et (*i*)

$$\sigma_{max} = \frac{24\,E\delta h}{5\,l^2} = \frac{24 \times 21 \times 10^5 \times 0{,}25 \times 2{,}5}{5 \times 50^2} = 2\,520 \text{ bars}.$$

et, d'après (*i*),

$$P = 525 \text{ daN}.$$

8. Déterminer la flèche δ à mi-portée de la poutre en bois de la figure 72*a*, sachant que la section est 25×25 cm. Déterminer aussi la contrainte de flexion maximum.

Réponse. $\delta = 0{,}48$ cm, $\sigma_{max} = 34{,}73$ bars.

9. Calculer la contrainte de flexion maximum et la flèche à mi-portée de la poutre du problème précédent, dans le cas de charge de la figure 72*e*.

Réponse. $\delta = 0$, $\sigma_{max} = 8{,}65$ bars.

37. Méthode de superposition

La méthode du moment des aires (§ 34) nous a permis de définir complètement les flèches d'une poutre à l'aide du diagramme du moment fléchissant. Le moment fléchissant, produit dans une section de poutre quelconque par plusieurs charges transversales s'exerçant simultanément, est égal à la somme des moments fléchissants créés dans la même section par des charges isolées agissant séparément. Ceci découle directement de la définition du moment fléchissant (§ 20). Il s'ensuit que la flèche, produite en un point quelconque de la poutre par un système de charges transversales s'exerçant simultanément, s'obtient en sommant les flèches en ce point dues aux charges isolées. Connaissant, par exemple, les lignes élastiques des cas illustrés par les figures 123 et 119, on peut obtenir par simple sommation les flèches d'une poutre cantilever ou en appui simple supportant une charge transversale quelconque.

Prenons le cas de la figure 138 et utilisons les équations (97) et (98), on conclut que la flèche en *B* est

$$\delta_b = \frac{Ql^3}{3\,EI_z} + \frac{Pc^2}{2\,EI_z}\left(l - \frac{c}{3}\right).$$

De même, la flèche en *D* est

$$\delta_d = \frac{Q}{EI_z}\left(\frac{lc^2}{2} - \frac{c^3}{6}\right) + \frac{Pc^3}{3\,EI_z}.$$

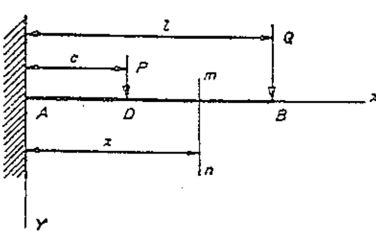


Fig. 138.

La flèche, au droit d'une section quelconque *mn* du tronçon *DB* de la poutre cantilever, est

$$y = \frac{Pc^2}{2\,EI_z}\left(x - \frac{c}{3}\right) + \frac{Q}{EI_z}\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right).$$

Dans le cas d'une charge répartie, on remplacera naturellement la sommation par une intégration. Prenons, par exemple, le cas d'une poutre en appui simple soumise à une charge uniformément répartie, figure 130, et calculons les pentes aux extrémités ainsi que la flèche au centre. D'après l'équation (*a*) du paragraphe 36, l'accroissement θ_1 de la pente, créé à l'extrémité gauche de la poutre par l'élément $q\mathrm{d}b$ (voir fig. 130), est

$$\mathrm{d}\theta_1 = \frac{qab\,(l+b)\,\mathrm{d}b}{6\,lEI_z} = \frac{qb\,(l^2 - b^2)\,\mathrm{d}b}{6\,lEI_z}.$$

On obtient la pente θ_1, produite par la charge totale, en sommant de $b = 0$ à $b = l$ les accroissements de la pente dus à tous les éléments $q\mathrm{d}b$. Ainsi

$$\theta_1 = \int_0^l \frac{qb\,(l^2 - b^2)\,\mathrm{d}b}{6\,lEI_z} = \frac{ql^3}{24\,EI_z}. \qquad (a)$$

La flèche au centre s'obtient par l'équation (91), calculée d'après l'hypothèse suivant laquelle la charge se situe à la droite du milieu. Un élément de charge $q\mathrm{d}b$, ainsi localisé, produit au milieu une flèche

$$(\mathrm{d}y)_{x=l/2} = \frac{qb\mathrm{d}b}{48\,EI_z}(3\,l^2 - 4\,b^2).$$

Sommons les flèches dues à tous ces éléments de charge à droite du milieu et remarquons que la charge sur la moitié gauche de la poutre produit la même flèche au milieu que la charge sur la moitié droite, nous obtenons pour la flèche totale

$$\delta = (y)_{x=l/2} = 2\int_0^{l/2} \frac{qb\mathrm{d}b}{48\,EI_z}(3\,l^2 - 4\,b^2) = \frac{5}{384}\,\frac{ql^4}{EI_z}. \qquad (b)$$

Les résultats (*a*) et (*b*) coïncident avec les formules (83) et (82), obtenues par intégration de l'équation différentielle de la ligne élastique.

Fig. 139.

La méthode de superposition s'utilise spécialement pour le cas où la charge répartie ne couvre qu'une partie de la portée (fig. 139). Utilisons l'expression ci-dessus de $(dy)_{x=l/2}$, la flèche au milieu, due à la charge placée à droite de ce milieu, est

$$\delta_1 = \int_d^{l/2} \frac{qb\mathrm{d}b}{48\,EI_z}(3\,l^2-4\,b^2)\,.$$

La charge à gauche du milieu produit la flèche

$$\delta_2 = \int_c^{l/2} \frac{qb\mathrm{d}b}{48\,EI_z}(3\,l^2-4\,b^2)\,.$$

La flèche totale au centre est alors

$$\delta = \delta_1+\delta_2 = \int_d^{l/2} \frac{qb\mathrm{d}b}{48\,EI_z}(3\,l^2-4\,b^2)+\int_c^{l/2} \frac{qb\mathrm{d}b}{48\,EI_z}(3\,l^2-4\,b^2)\,.$$

Considérons enfin une poutre cantilever chargée uniformément (fig. 140). La flèche, produite au droit de la section *mn* par chaque charge élémentaire $q\mathrm{d}c$, située à sa gauche, se déduit de l'équation (98) en substituant $q\mathrm{d}c$ à P. La flèche y_1, due à la charge totale à gauche de *mn*, est la sommation, pour c variant de 0 à x, des flèches produites par toutes les charges élémentaires :

Fig. 140.

$$y_1 = \frac{1}{EI_z}\int_0^x \frac{qc^2}{2}\left(x-\frac{1}{3}c\right)\mathrm{d}c = \frac{q}{2\,EI_z}\frac{x^4}{4}\,.$$

La flèche en *mn*, due à une charge élémentaire $q\mathrm{d}c_1$ à droite de cette section, s'obtient par (97) en substituant $q\mathrm{d}c_1$ à P et c_1 à l. La flèche y_2, produite en *mn* par la charge totale à droite, est la sommation des flèches dues à toutes ces charges élémentaires, avec c_1 variant de x à l :

$$y_2 = \frac{1}{EI_z}\int_x^l q\left(\frac{c_1x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right)\mathrm{d}c_1 = \frac{q}{2\,EI_z}\left(-\frac{x^4}{6}+\frac{x^2l^2}{2}-\frac{lx^3}{3}\right).$$

Par suite, la flèche totale au droit de la section *mn* est

$$y = y_1+y_2 = \frac{q}{2\,EI_z}\left(\frac{l^2x^2}{2}-\frac{lx^3}{3}+\frac{x^4}{12}\right),$$

qui est identique à l'équation (101) déjà obtenue.

Problèmes

1. Déterminer la flèche au milieu de la poutre *AB* de la figure 141, lorsque $I_z = 40$ cm⁴, $q = 744$ daN/m, $l = 7{,}50$ m, $a = 3{,}75$ m, $b = 2{,}50$ m, $E = 21\times10^5$ bars.

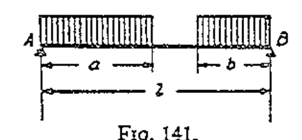


Fig. 141.

Solution. Puisque $a = l/2$, la flèche créée au milieu par la charge s'exerçant sur la moitié gauche de la poutre est, d'après (82),

$$(y_1)_{x=l/2} = \frac{1}{2}\frac{5}{384}\frac{ql^4}{EI_z}.$$

La flèche au milieu, due à la charge sur la moitié droite de la poutre, est

$$(y_2)_{x=l/2} = \int_0^b \frac{qc\mathrm{d}c}{48\,EI_z}(3\,l^2-4\,c^2) = \frac{25}{48\times162}\times\frac{ql^4}{EI_z}.$$

La flèche totale est donc

$$(y)_{x=l/2} = (y_1)_{x=l/2}+(y_2)_{x=l/2}$$
$$= \left(\frac{1}{2}\frac{5}{384}+\frac{25}{48\times162}\right)\frac{ql^4}{EI_z} = 2{,}59\ \text{cm}\,.$$

2. Déterminer la flèche à mi-portée de la poutre représentée sur la figure 95, lorsque la charge est placée de manière à produire un moment fléchissant maximum.

Suggestion. On peut obtenir la flèche à l'aide de l'équation (91) associée à la méthode de superposition et en substituant $b = l/2-d/4$ dans cette équation pour une charge, et $b = l/2-\frac{3}{4}d$ pour l'autre.

3. Déterminer les flèches au milieu et les angles de rotation des extrémités des poutres des figures 72*b* et 72*d*. Nous supposons avoir affaire à une poutre IPN, 200 mm, avec $I_z = 2\,140$ cm^4.

Réponse. Pour la poutre de la figure 72*b*, $\delta = 2{,}8$ mm, $\theta_1 = 0{,}002\,23$ radian, $\theta_2 = -0{,}002\,55$ radian.

4. Une poutre à extrémités en appui est fléchie par deux couples M_1 et M_2, appliqués sur ces extrémités (fig. 142). Déterminer les angles de rotation des extrémités et la position de la section où la flèche est maximum.

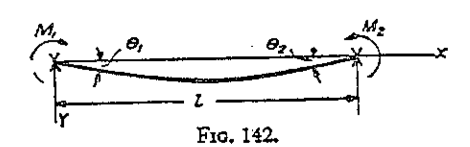


Fig. 142.

Solution. Les valeurs absolues des angles de rotation, d'après les équations (103) et (104), sont :

$$\theta_1 = \frac{M_1 l}{3\,EI_z} + \frac{M_2 l}{6\,EI_z}, \qquad |\theta_2| = \frac{M_2 l}{3\,EI_z} + \frac{M_1 l}{6\,EI_z}.$$

La ligne élastique, d'après (105), est

$$y = \frac{M_1 l(l-x)}{6\,EI_z}\left[1 - \left(\frac{l-x}{l}\right)^2\right] - \frac{M_2 lx}{6\,EI_z}\left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right).$$

La position de la flèche maximum s'obtient en égalant à zéro la première dérivée de cette expression.

5. Quel est le rapport des flèches aux extrémités des poutres cantilevers de la figure 143, sachant que l'intensité de la charge uniforme est la même dans les deux cas.

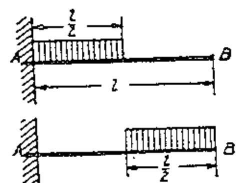


Fig. 143.

Réponse. 7 : 41.

6. Calculer les flèches aux extrémités des poutres cantilevers de la figure 73, en supposant qu'elles sont en acier, que leur hauteur $h = 25$ cm, enfin que la contrainte de flexion maximum est 1 125 bars. Utiliser la méthode de superposition.

Solution. Soit, par exemple, le cas de la figure 73*b*. La charge totale uniforme étant $ql = 1\,814$ daN et la charge à l'extrémité $P = 453{,}5$ daN $= \frac{1}{4}\,ql$, nous avons :

$$\delta = \frac{ql^4}{8\,EI_z} + \frac{Pl^3}{3\,EI_z} = \frac{5\,ql^4}{24\,EI_z},$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max} h}{2\,I_z} = \frac{h}{2\,I_z}\left(Pl + \frac{ql^2}{2}\right) = \frac{3\,ql^2 h}{8\,I_z}.$$

Eliminons I_z, nous obtenons

$$\delta = \frac{5\,l^2 \sigma_{\max}}{9\,Eh} = 1{,}08 \text{ cm}.$$

On résout de la même manière les trois autres problèmes.

7. Trouver la flèche δ de l'extrémité B d'une cantilever AB sollicitée par la charge triangulaire ACB (fig. 144).

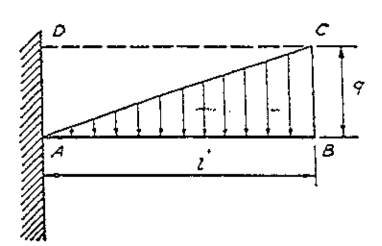


Fig. 144.

Solution. Appliquons la méthode de superposition et utilisons l'équation (102) ainsi que le résultat du problème 1, paragraphe 35, nous obtenons,

$$\delta = \frac{ql^4}{8\,EI_z} - \frac{ql^4}{30\,EI_z} = \frac{11\,ql^4}{120\,EI_z}.$$

38. Flèche des poutres en porte-à-faux

On divise en deux parties une poutre en porte à faux : une première partie, située entre les appuis, se traite comme une poutre en appui sur ses extrémités, la deuxième partie, composée du porte-à-faux se traite comme une cantilever. Considérons la flexion d'une poutre avec un porte-à-faux, soumise à l'action d'une charge uniformément répartie q (fig. 145). La poutre est divisée en deux parties : AB et BC, l'action du porte-à-faux sur le tronçon entre appuis est remplacée par un effort tranchant qa et un couple $M = qa^2/2$. L'effort tranchant est transmis directement à l'appui et l'on ne tiendra compte que du couple $qa^2/2$.

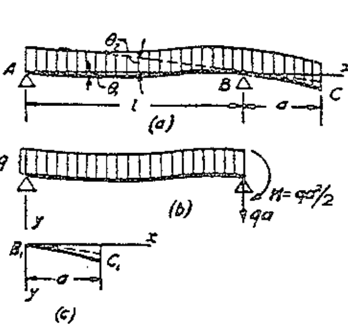


Fig. 145.

Par suite, la flèche d'une section quelconque entre appuis s'obtient en soustrayant la flèche due au couple $qa^2/2$ des flèches dues à la charge uniforme q (fig. 145b). Utilisons les équations (81) et (105), nous obtenons

$$y = \frac{q}{24\,EI_z}(l^3x - 2\,lx^3 + x^4) - \frac{qa^2\,lx}{12\,EI_z}\left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right).$$

L'angle de rotation de la section en B s'obtient par les équations (83) et (104), d'où, en considérant la rotation positive lorsqu'elle suit le sens des aiguilles d'une montre, nous avons

$$\theta_2 = \frac{qa^2\,l}{6\,EI_z} - \frac{ql^3}{24\,EI_z}.$$

La flèche d'une section quelconque du porte-à-faux (fig. 145c) s'obtient par superposition de la flèche d'un cantilever (fig. 101) sur la flèche

$$\theta_2 x = \left(\frac{qa^2\,l}{6\,EI_z} - \frac{ql^3}{24\,EI_z}\right)x,$$

produite par la rotation de la section B.

Problèmes

1. Déterminer la flèche et la pente à l'extrémité C de la poutre de la figure 147a.

Réponse. Flèche $= \dfrac{Pa^2\,(l+a)}{3\,EI_z}$, pente $= \dfrac{Pa\,(2\,l+3\,a)}{6\,EI_z}$.

2. Calculer la flèche au point C de la figure 146 ainsi qu'à mi-portée

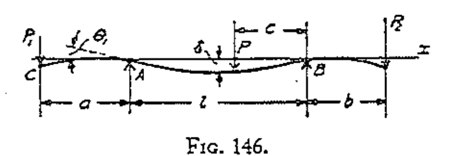


Fig. 146.

Solution. Le tronçon de poutre entre appuis se trouve dans la condition d'une poutre sollicitée par une force P et par les couples P_1a et P_2b aux appuis. A l'aide des équations (91), (105) et la méthode de superposition, la flèche au milieu s'exprime par

$$\delta = \frac{Pc}{48\,EI_z}(3\,l^2 - 4\,c^2) - \frac{P_1al^2}{16\,EI_z} - \frac{P_2bl^2}{16\,EI_z}.$$

La rotation θ_1 en A s'obtient par les équations (88), (103) et (104),

$$\theta_1 = \frac{Pc\,(l^2 - c^2)}{6\,lEI_z} - \frac{P_1al}{3\,EI_z} - \frac{P_2bl}{6\,EI_z}.$$

D'après (95), la flèche en C est

$$\frac{P_1a^3}{3\,EI_z} - a\theta_1.$$

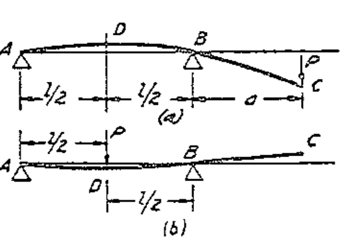


Fig. 147.

3. Une poutre avec porte-à-faux est fléchie dans un cas par la force P appliquée à son extrémité (fig. 147a), dans l'autre cas par la même force appliquée au milieu de la travée (fig. 147b). Démontrer que la flèche au point D, dans le premier cas, est égale à la flèche en C dans le second cas.

Réponse. Dans chaque cas la flèche est

$$\frac{Pl^2a}{16\,EI_z}.$$

4. Une poutre de longueur l, avec deux porte-à-faux égaux, est sollicitée par deux forces égales P appliquées sur ses extrémités (fig. 148). Déterminer le rapport x/l pour lequel :

a) la flèche au milieu est égale à la flèche en chacune des extrémités ;
b) la flèche au milieu est maximum.

Réponse. *a*) $x = 0{,}152\,l$; *b*) $x = l/6$.

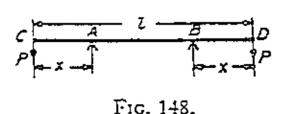


Fig. 148.

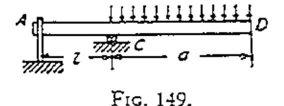


Fig. 149.

5. Une poutre en bois de section circulaire en appui sur C, fixée en son extrémité A, supporte une charge q répartie uniformément sur le porte-à-faux CD (fig. 149). Déterminer le diamètre de la section et la flèche en D, sachant que $l = 0{,}90$ m, $a = 1{,}80$ m, $q = 446$ daN/m, $\sigma_W = 84$ bars.

Solution. Le diamètre d s'obtient par l'équation :

$$\frac{qa^2}{2} \div \frac{\pi d^3}{32} = \sigma_W.$$

Par suite, la flèche en D est donnée par

$$\delta = \frac{qa^4}{8\,EI_z} + \frac{qa^3 l}{6\,EI_z} = \frac{qa^3}{24\,EI_z}(3\,a+4\,l)\,.$$

6. Une poutre de longueur l supporte une charge uniformément répartie d'intensité q (fig. 150). Déterminer la longueur des porte-à-faux afin que la valeur absolue du moment fléchissant maximum soit la plus petite possible. Calculer, dans ce cas, la flèche au milieu.

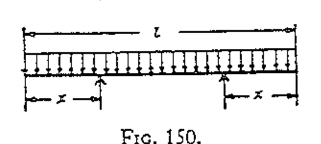


FIG. 150.

Solution. Ecrivons l'égalité des valeurs absolues des moments fléchissants au milieu et aux appuis, nous obtenons

$$x = 0{,}207\,l\,.$$

La flèche au milieu est déterminée par l'équation :

$$\delta = \frac{5}{384}\cdot\frac{q\,(l-2\,x)^4}{EI_z} - \frac{qx^2(l-2\,x)^2}{16\,EI_z}\,,$$

dans laquelle le premier terme du second membre représente la flèche produite par la charge entre appuis (éq. 82) et le second, la flèche due à la charge sur les porte-à-faux (éq. 105).

7. Déterminer les flèches aux extrémités des porte-à-faux des poutres de la figure 79*a*, *b*, *c*. On suppose que les poutres sont constituées par un profilé IPN de hauteur 200 mm avec $I_z = 2\,140$ cm^4, $E = 21\times10^5$ bars.

Réponse. Si l est la longueur de la poutre entre appuis et a la longueur du porte-à-faux, alors :

$$\delta_a = \frac{qa^4}{8\,EI_z} + \left(\frac{qa^2 l}{6\,EI_z} - \frac{ql^3}{24\,EI_z}\right)a\,,$$

$$\delta_b = \frac{Pa^2 l}{4\,EI_z} - \frac{117\,Pa^3}{384\,EI_z}\,,$$

$$\delta_c = \frac{qa^3}{8\,EI_z}(a+2\,l)\,.$$

39. Influence de l'effort tranchant sur la flèche des poutres

Dans l'étude antérieure (voir p. 132) seul fut pris en considération le moment fléchissant provoquant la flexion. L'effort tranchant produit une

flèche additionnelle, qui se présente sous la forme d'un glissement réciproque des sections adjacentes entre elles. Comme conséquence de la répartition non uniforme des efforts tranchants, les sections, auparavant planes, s'incurvent de la manière indiquée sur la figure 151 qui montre la flexion due au cisaillement seul [8]. Les éléments des sections, aux centres de gravité, restent verticaux et glissent l'un sur l'autre. Donc, la pente de la ligne élastique, due au cisaillement seul, est égale, dans chaque section, à la déformation de cisaillement au centre de gravité de cette section. Soit y_1 les flèches dues au cisaillement, nous obtenons, pour une section quelconque, l'expression de la pente suivante :

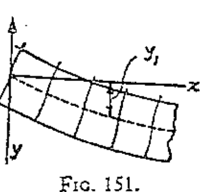


FIG. 151.

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{(\tau_{xy})_{y=0}}{G} = \frac{\alpha V}{AG}\,, \qquad (a)$$

où V/A représente le cisaillement moyen τ_{xy}, G le module de cisaillement et α un facteur numérique que l'on multiplie par le cisaillement moyen pour obtenir le cisaillement au centre de gravité des sections. Pour une section rectangulaire $\alpha = \frac{3}{2}$ (voir éq. 66, p. 113) ; pour une section circulaire $\alpha = \frac{4}{3}$ (voir éq. 68, p. 117). Dans le cas d'une charge uniforme sur la poutre, l'effort tranchant V est une fonction continue que l'on dérive par rapport à x. La courbure provoquée par le cisaillement seul est alors

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = \frac{\alpha}{AG}\frac{dV}{dx} = -\frac{\alpha}{AG}q\,,$$

où q est l'intensité de la charge. La somme de cette expression et de la courbure due au moment fléchissant (voir éq. 79) donne l'expression complète de la courbure :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{EI_z}\left(M + \frac{\alpha EI_z}{AG}q\right). \qquad (106)$$

On utilise cette équation, à la place de (79), pour déterminer les flèches dans tous les cas où l'influence de l'effort tranchant est prise en considération [9]. Connaissant M et q en fonction de x, l'équation (106) s'intègre de la manière indiquée au paragraphe 32.

La méthode de la poutre conjuguée (voir p. 150) s'applique aussi avantageusement dans ce cas en prenant pour ordonnées du diagramme de charge imaginaire

$$M + \alpha\frac{EI_z}{AG}q\,, \qquad (b)$$

au lieu de M seul.

Considérons, par exemple, le cas d'une poutre en appui simple supportant

[8] Nous n'avons pas représenté la déformation produite par le moment fléchissant et qui se compose d'une rotation réciproque des sections adjacentes.

[9] Une autre méthode de détermination de la flèche due au cisaillement est étudiée à la page 304.

une charge uniforme (fig. 152). Le moment fléchissant d'une section quelconque x est

$$M = \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2}. \qquad (c)$$

La charge sur la poutre conjuguée se compose de deux parties : la première représentée par le premier terme de (b) et donnée par le diagramme parabolique du moment fléchissant (fig. 152b), la seconde représentée par le deuxième terme de (b), $\alpha(EI_z/AG)q$. Puisque q est constant, le second terme est une charge uniformément répartie (voir fig. 152c).

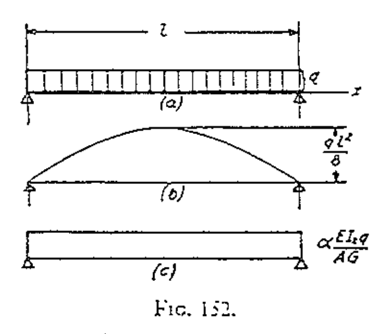


FIG. 152.

La flèche additionnelle, en une section quelconque, due à l'effort tranchant, représente le moment fléchissant produit en cette section de la poutre conjuguée par la charge de la figure 152c, divisée par EI. Par conséquent, la flèche additionnelle au milieu de la poutre est

$$\delta_1 = \frac{1}{EI_z}\left(\alpha\frac{EI_z}{AG}q\right)\frac{l^2}{8} = \frac{\alpha l^2 q}{8\,AG}.$$

Ajoutons celle-ci à la flèche provoquée par le moment fléchissant (voir éq. 82, p. 136), nous obtenons la flèche totale

$$\delta = \frac{5}{384}\frac{ql^4}{EI_z} + \frac{\alpha l^2 q}{8\,AG} = \frac{5}{384}\frac{ql^4}{EI_z}\left(1 + \frac{48\,\alpha}{5}\frac{k_z^2}{l^2}\frac{E}{G}\right), \qquad (d)$$

où $k_z = \sqrt{I_z/A}$ est le rayon de giration de la section par rapport à l'axe z.

Pour une section rectangulaire de hauteur h, $k_z^2 = \frac{1}{12}h^2$, $\alpha = \frac{3}{2}$. Soit $E/G = 2(1+\mu) = 2{,}6$, nous obtenons, à l'aide de (d),

$$\delta = \frac{5}{384}\frac{ql^4}{EI_z}\left(1 + 3{,}12\frac{h^2}{l^2}\right).$$

On constate que pour $l/h = 10$, l'influence de l'effort tranchant sur la flèche est de l'ordre de 3 pour cent. Cette influence augmente lorsque l/h décroît.

Le coefficient α est généralement supérieur à 2 pour les poutres I, et lorsque ces poutres sont courtes, l'influence de l'effort tranchant est relativement grande. D'après l'équation (70) et la figure 110, nous avons

$$\frac{\alpha V}{A} = \frac{V}{b_1 I_z}\left[\frac{bh^2}{8} - \frac{h_1^2}{8}(b - b_1)\right],$$

d'où

$$\alpha = \frac{A}{b_1 I_z}\left[\frac{bh^2}{8} - \frac{h_1^2}{8}(b - b_1)\right]. \qquad (e)$$

Supposons, par exemple, que $h = 24$ cm, $A = 31$ cm², $I_z = 2\,810$ cm⁴,

l'épaisseur de l'âme $b_1 = \frac{5}{8}$ cm, $l = 6h$. L'équation (e) donne alors $\alpha = 2{,}42$. Substituons dans (d), nous trouvons

$$\delta = \frac{5}{384}\frac{ql^4}{EI_z}\left(1 + \frac{48}{5}\times 2{,}42 \times \frac{2\,810}{31\times 144^2}\times 2{,}6\right) = 1{,}265\,\frac{5\,ql^4}{384\,EI_z}.$$

Dans ce cas la flèche additionnelle, due au cisaillement, est égale à 26,5 pour cent de la flèche produite par le moment fléchissant, et il faut alors en tenir compte.

Une charge concentrée P (fig. 153) doit être considérée comme le cas limite d'une charge répartie sur un très petit tronçon e de poutre. La valeur de la sollicitation virtuelle P sur la poutre conjuguée A_1B_1, correspondant au second terme de l'expression (b), est

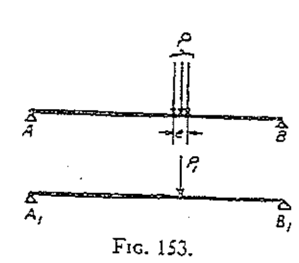


FIG. 153.

$$P_1 = \alpha\frac{EI_z}{AG}P. \qquad (f)$$

La flèche additionnelle due aux efforts tranchants s'obtient en divisant par EI_z le moment fléchissant créé dans la poutre conjuguée par la charge concentrée virtuelle (f). Par exemple, dans le cas d'une sollicitation centrale d'une poutre, le moment fléchissant au milieu de la poutre conjuguée, produit par la charge (f), est égal à $\alpha(EI_z/AG)Pl/4$, et la flèche additionnelle au milieu, due aux efforts tranchants, est

$$\delta_1 = \frac{\alpha}{AG}\frac{Pl}{4}. \qquad (g)$$

Additionnons (g) à la flèche produite par le moment fléchissant seul (voir éq. 90, p. 140), on obtient l'expression suivante de la flèche totale :

$$\delta = \frac{Pl^3}{48\,EI_z} + \frac{\alpha}{AG}\cdot\frac{Pl}{4} = \frac{Pl^3}{48\,EI_z}\left(1 + \frac{12\,\alpha k_z^2}{l^2}\frac{E}{G}\right).$$

Dans le cas d'une poutre de section rectangulaire h, nous avons :

$$\frac{k_z^2}{l^2} = \frac{h^2}{12\,l^2}, \qquad \alpha = \frac{3}{2},$$

et nous obtenons

$$\delta = \frac{Pl^3}{48\,EI_z}\left(1 + 3{,}90\frac{h^2}{l^2}\right). \qquad (h)$$

Pour $h/l = \frac{1}{10}$ l'effet additionnel de l'effort tranchant est de l'ordre de 4 pour cent.

Nous avons admis dans l'étude précédente que les sections de poutre pouvaient gauchir librement comme sur la figure 151. La poutre uniformément chargée constitue l'un des cas où cette condition est approximativement satisfaite. L'effort tranchant au milieu d'une telle poutre est nul et il ne s'y produit aucun gauchissement. Le gauchissement croît progressivement avec

l'effort tranchant à mesure que l'on s'éloigne du milieu de la poutre vers la gauche ou vers la droite. La condition de symétrie de la déformation par rapport à la section médiane est donc satisfaite. Considérons alors la flexion provoquée par une charge concentrée au milieu. D'après la condition de symétrie la section médiane de la poutre reste plane. En même temps, les sections contiguës à la charge, à sa droite et à sa gauche, supportent un effort tranchant $P/2$ qui provoque leur gauchissement. La condition de continuité de la déformation montre toutefois qu'il ne peut y avoir passage brusque de la section médiane plane aux sections voisines gauchies. Le gauchissement croît de façon continue lorsqu'on parcourt la poutre dans une direction quelconque à partir du milieu, et ce n'est qu'à une certaine distance de la charge que le gauchissement peut être celui produit par l'effort tranchant $P/2$ dans des conditions de gauchissement libre. On conclut qu'au voisinage de la section médiane la distribution des contraintes n'est pas celle prévue par la théorie élémentaire de la flexion (voir p. 91). On prévient partiellement le gauchissement, et la déformation additionnelle, due aux efforts tranchants, est quelque peu inférieure à celle trouvée plus haut (voir éq. g). Une étude plus approfondie [10] montre que dans le cas d'une charge concentrée au milieu, la flèche en ce milieu est

$$\delta = \frac{Pl^3}{48\,EI}\left[1 + 2{,}85\,\frac{h^2}{l^2} - 0{,}84\left(\frac{h}{l}\right)^3\right]. \qquad (i)$$

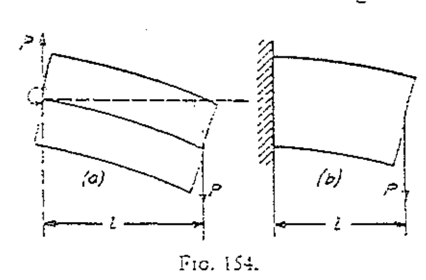


Fig. 154.

Nous rencontrons des conditions analogues dans le cas des poutres cantilever. Si la section encastrée peut gauchir librement, comme indiqué sur la figure 154a, on se trouve dans les conditions admises pour l'établissement de l'équation (h). La flèche d'une cantilever à section rectangulaire s'obtient en substituant l à $l/2$ et P à $P/2$ dans cette équation, ce qui donne

$$\delta = \frac{Pl^3}{3\,EI}\left(1 + 0{,}98\,\frac{h^2}{l^2}\right). \qquad (j)$$

Lorsqu'on empêche tout gauchissement de la section encastrée (fig. 154b), les conditions sont celles admises pour l'établissement de l'équation (i) et la flèche devient

$$\delta = \frac{Pl^3}{3\,EI}\left[1 + 0{,}71\,\frac{h^2}{l^2} - 0{,}10\left(\frac{h}{l}\right)^3\right], \qquad (k)$$

qui est inférieure à la flèche donnée par l'expression (j).

(10) Voir L. N. G. Filon, *loc. cit.*, p. 119 ; et S. Timoshenko, *Phil. Mag.*, p. 1095, vol. 47, 1924. Voir aussi Th. Karman, *Scripta Universitatis atque Bibliothecae Hierosolmitanarum*, 1923 ; et « Théorie de l'élasticité » de l'auteur, p. 101, 1936.

6
PROBLÈMES DE FLEXION STATIQUEMENT INDÉTERMINÉS

40. Liaisons surabondantes

Dans l'étude précédente nous avons considéré trois types de poutres : les poutres cantilever, les poutres en appui simple aux extrémités, les poutres en appui simple avec porte-à-faux. Dans ces trois cas les réactions d'appuis se déterminent à partir des équations fondamentales de la statique, les problèmes sont donc *statiquement déterminés*. Nous allons aborder maintenant les problèmes de flexion des poutres dans lesquels les équations de la statique ne suffisent plus à déterminer toutes les réactions d'appuis, de sorte qu'il devient nécessaire d'établir des relations supplémentaires fondées sur la considération de la flèche des poutres. De tels problèmes sont dits *statiquement indéterminés*.

Examinons les divers types d'appuis que l'on peut donner à une poutre. L'appui de la figure 155a est du type à *rotule mobile*. Si l'on

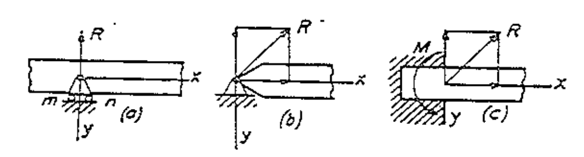


Fig. 155.

néglige les frottements dans l'articulation et les rouleaux, il est évident que dans ce genre d'appui la réaction passe par le centre de l'articulation et qu'elle est perpendiculaire au plan mn sur lequel se déplacent les rouleaux. Par suite, nous connaissons le point d'application de la réaction et sa direction. Le seul élément inconnu est donc la grandeur de cette réaction.

La figure 155b représente un appui à *rotule fixe*. Dans ce cas, la réaction passe par le centre de l'articulation, mais elle a une direction quelconque dans le plan de la figure. Nous avons alors deux inconnues à déterminer par les équations de la statique : la direction de la réaction

et sa grandeur ou, si l'on préfère, les composantes horizontale et verticale de la réaction.

La figure 155*c* montre un *appui encastré*. Dans ce cas il faut ajouter une troisième inconnue à la direction et à la grandeur : le point d'application. Les réactions réparties sur la section encastrée peuvent être remplacées par une force R appliquée au centre de gravité de la section et par un couple M. Nous avons bien trois inconnues à déterminer par les équations de la statique : les deux composantes de R et la valeur du couple M.

Lorsque les charges transversales appliquées à la poutre sont dans un plan de symétrie nous avons, pour déterminer les réactions aux appuis, les trois équations de la statique :

$$\sum X = 0\,, \qquad \sum Y = 0\,, \qquad \sum M = 0\,. \tag{a}$$

Si l'appui de la poutre est tel qu'il y ait seulement trois *éléments de réaction* inconnus, on les détermine à l'aide des équations (*a*), le problème est alors statiquement déterminé. Ces trois éléments suffisent à assurer l'immobilité de la poutre. Lorsque le nombre des éléments de réaction est supérieur à trois, nous dirons qu'il existe des *liaisons surabondantes* et le problème est statiquement indéterminé.

L'appui d'une poutre cantilever est encastré. Dans ce cas, ainsi que nous venons de l'expliquer, le nombre d'éléments de réaction inconnus est trois et on les détermine par les équations (*a*) de la statique. Pour des poutres en appui aux deux extrémités et pour celles en appui avec porte-à-faux, on suppose généralement que l'un des appuis est immobile et que l'autre est constitué par une rotule mobile. Dans ce cas, nous avons encore trois éléments de réaction inconnus que l'on calcule par les équations de la statique.

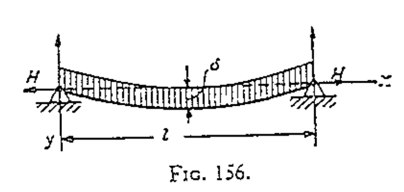


FIG. 156.

Si la poutre possède des articulations fixes aux deux extrémités (fig. 156), le problème est alors statiquement indéterminé. A chaque extrémité nous avons deux éléments inconnus : les deux composantes de la réaction correspondante ; et pour déterminer les quatre inconnues nous ne disposons que des trois équations (*a*). Par suite, nous avons une liaison surabondante et, pour déterminer les réactions, il est nécessaire de considérer la déformation de la poutre. On calcule les composantes verticales des réactions par les équations de la statique. Dans le cas de charges

verticales on peut aussi conclure, d'après la statique, que les composantes horizontales H sont égales et de sens opposé. Considérons, pour calculer la valeur de H, l'allongement de l'axe de la poutre pendant la flexion. On obtient une bonne approximation de cet allongement en supposant que la ligne élastique de la poutre est une parabole (¹), dont l'équation est

$$y = \frac{4\,\delta x\,(l-x)}{l^2}\,, \tag{b}$$

où δ est la flèche au milieu. La longueur de la courbe représentative est

$$s = 2\int_0^{l/2} \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} = 2\int_0^{l/2} \mathrm{d}x \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,. \tag{c}$$

Dans le cas d'une faible courbure, la quantité $(\mathrm{d}y/\mathrm{d}x)^2$ est petite en comparaison de l'unité et, si l'on néglige les petites quantités d'ordre supérieur à deux, nous obtenons approximativement

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2} \approx 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2.$$

Substituons cette expression dans (*c*) et utilisons l'équation (*b*), on trouve pour la longueur de la courbe

$$s = l\left(1 + \frac{8}{3}\,\frac{\delta^2}{l^2}\right).$$

La différence entre la longueur de la courbe et la distance l entre appuis représente l'allongement axial total de la poutre, il est égal à $\frac{8}{3}(\delta^2/l)$. L'allongement unitaire est alors $\frac{8}{3}(\delta^2/l^2)$. Soit E le module d'élasticité du matériau constituant la poutre et A l'aire de sa section, nous obtenons les réactions horizontales à l'aide de l'équation

$$H = \frac{8}{3}\,\frac{\delta^2}{l^2}\,EA\,. \tag{d}$$

Il est important de noter qu'en pratique la flèche δ, pour la plupart des poutres, est très petite par rapport à l et la contrainte de traction $\frac{8}{3}(\delta^2/l^2)E$, due aux forces H, qui est généralement petite par rapport aux contraintes de flexion, peut être négligée. Ceci justifie le mode courant de calcul des

(¹) L'expression exacte de la ligne élastique sera donnée ultérieurement (voir 2ᵉ partie).

poutres en appui aux extrémités dans lequel on suppose que l'un des appuis est une articulation mobile, bien que les dispositifs particuliers permettant un mouvement libre de l'articulation ne soient guère utilisés réellement que pour de grandes portées comme celles des ponts.

Dans le cas de la flexion des barres flexibles et des bandes métalliques minces, où la flèche δ n'est plus très petite par rapport à l, on ne doit plus négliger les tractions dues aux efforts longitudinaux H. On analysera ce genre de problème dans la deuxième partie. On utilise, dans l'étude qui suit, la méthode de superposition pour résoudre les problèmes statiquement indéterminés, et les solutions sont obtenues en combinant les cas statiquement déterminés déjà résolus, de manière à satisfaire aux conditions aux appuis.

41. Poutre encastrée à une extrémité et en appui sur l'autre

Dans ce cas nous avons trois éléments de réaction inconnus à une extrémité et une inconnue à l'autre. Il s'agit donc d'un système hyperstatique comportant une liaison surabondante. Commençons par le cas d'une charge transversale unique P (fig. 157*a*), considérons comme liaison surabondante celle qui s'oppose à la rotation de l'extrémité A de la poutre pendant la flexion. Supprimant cette liaison, nous obtenons le problème statiquement déterminé de la figure 157*b*. Etudions alors séparément la flexion produite par le couple statiquement indéterminé M_a (fig. 157*c*)(²). Il est évident que la flexion de la poutre représentée sur la figure 157*a* s'obtient par combinaison des cas (*b*) et (*c*). Il suffit d'ajuster la valeur du couple M_a en A, de manière qu'il satisfasse à la condition

$$\theta_1 = -\theta_1' . \qquad (a)$$

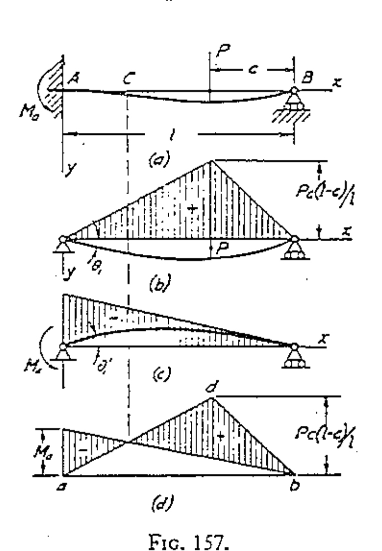


Fig. 157.

(²) On a représenté ensemble sur la figure les diagrammes des lignes élastiques et du moment fléchissant.

Donc, la rotation du bord gauche de la poutre, due à l'effort P, est éliminée par le couple M_a et la condition de bord encastré à pente nulle est satisfaite. Pour obtenir le couple statiquement indéterminé M_a il suffit de substituer dans (*a*) les valeurs connues des angles θ_1 et θ_1', extraites des équations (88), page 140, et (104), page 153. Par suite,

$$\frac{Pc\,(l^2-c^2)}{6\,lEI_z} = -\frac{M_a l}{3\,EI_z},$$

d'où

$$M_a = -\frac{Pc\,(l^2-c^2)}{2\,l^2}. \qquad (107)$$

Le diagramme du moment fléchissant s'obtient en combinant les diagrammes des cas (*b*) et (*c*), comme l'indique l'aire hachurée de la figure 157*d*. Le moment fléchissant maximum peut se trouver en *a* ou en *d*.

On détermine aisément la flèche de la poutre en un point quelconque en retranchant de la flèche produite par la charge P en ce point (fig. 157*b*), la flèche due au couple M_a (fig. 157*c*). Les équations des lignes élastiques de ces deux cas ont déjà été formulées en (86), (87) à la page 139 et en (105), page 153. Prenons, par exemple, le cas $c < \frac{1}{2} l$ et calculons la flèche δ à mi-portée. D'après les équations (91) et (105) nous avons

$$\delta = \frac{Pc}{48\,EI_z}(3\,l^2 - 4\,c^2) + \frac{M_a l^2}{16\,EI_z},$$

ou, en utilisant l'équation (107),

$$\delta = \frac{Pc}{96\,EI_z}(3\,l^2 - 5\,c^2).$$

Au point C, où le moment fléchissant s'annule, la courbure de la ligne élastique est nulle et l'on obtient un point d'inflexion, c'est-à-dire un point où la courbure change de signe.

On remarque, d'après (107), que le moment fléchissant à l'extrémité encastrée dépend de la position de la charge P. Si l'on égale à zéro la dérivée de l'équation (107) par rapport à c, on trouve que le moment M_a devient maximum en valeur absolue lorsque $c = l/\sqrt{3}$. D'où

$$|M_a|_{max} = \frac{Pl}{3\sqrt{3}} = 0{,}192\,Pl. \qquad (108)$$

Le moment fléchissant au droit de la charge, d'après la figure 157*d*, est

$$M_d = \frac{Pc\,(l-c)}{l} - \frac{c}{l}\,\frac{Pc\,(l^2-c^2)}{2\,l^2} = \frac{Pc}{2\,l^3}(l-c)^2\,(2\,l+c)\,. \qquad (b)$$

Si l'on égale à zéro la dérivée de (*b*) par rapport à *c*, nous trouvons que M_a devient maximum lorsque

$$c = \tfrac{1}{2}\,l\,(\sqrt{3}-1) = 0{,}366\,l\,.$$

Substituons cette valeur dans (*b*), il vient

$$(M_d)_{max} = 0{,}174\,Pl\,.$$

Comparons ce résultat à l'équation (108), on remarque que dans le cas d'une charge mobile les contraintes normales maximums se développent dans la section encastrée et se produisent pour

$$c = \frac{l}{\sqrt{3}}\,.$$

Connaissant la solution pour le cas d'une charge unique concentrée et utilisant la méthode de superposition, on résout, par simple extension de la théorie précédente, les problèmes impliquant d'autres types de charges transversales. Prenons, par exemple, le cas de la figure 158. Le moment à l'encastrement *A*, dû à une charge élémentaire *qdc*, s'obtient par l'équation (107) en y substituant *qdc à P*. Le moment total M_a en cet appui est

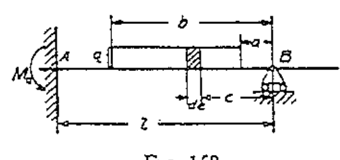


Fig. 158.

$$M_a = -\int_a^b \frac{qc\mathrm{d}c\,(l^2-c^2)}{2\,l^2} = -\frac{q}{2\,l^2}\left[\frac{l^2\,(b^2-a^2)}{2} - \frac{b^4-a^4}{4}\right]. \qquad (c)$$

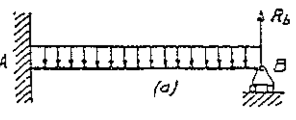
Lorsque la charge est répartie sur toute la longueur de la poutre (fig. 159*a*), on fait alors dans l'équation (*c*), $a=0$, $b=l$ et nous obtenons

$$M_a = -\frac{ql^2}{8}\,. \qquad (109)$$

On détermine le diagramme du moment fléchissant en retranchant le diagramme triangulaire, dû au couple M_a (fig. 159), du diagramme

parabolique, dû à la charge uniforme. L'on remarque que les contraintes de flexion sont maximums dans la section encastrée.

La flèche en un point quelconque de la poutre s'obtient en soustrayant la flèche en ce point, produite par le couple M_a (voir éq. 105, p. 153), de la flèche au même point, due à la charge uniforme (voir éq. 81, p. 135). On obtient alors, à mi-portée,



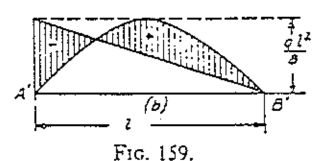


Fig. 159.

$$\delta = \frac{5}{384}\,\frac{ql^4}{EI_z} + \frac{M_a\,l^2}{16\,EI_z} = \frac{ql^4}{192\,EI_z}\,. \qquad (110)$$

Problèmes

1. Tracer les diagrammes de l'effort tranchant pour les cas des figures 157 et 159.

2. Déterminer la flèche maximum dans le cas de la charge uniformément répartie représentée sur la figure 159.

Solution. Combinant les équations (81) et (105), on obtient l'équation suivante de la ligne élastique :

$$y = \frac{q}{48\,EI_z}\,(3\,l^2x^2 - 5\,lx^3 + 2\,x^4)\,. \qquad (d)$$

Posons $dy/dx = 0$, nous situons le point où la flèche est maximum en $x = (l/16)(15-\sqrt{33}) = 0{,}579l$. Substituons dans (*d*), nous obtenons

$$\delta_{max} = \frac{ql^4}{185\,EI_z}\,.$$

3. Déterminer la réaction sur l'appui droit de la poutre de la figure 159, en la considérant comme une liaison surabondante.

Solution. Retirons l'appui *B*, la flèche en cette extrémité de la poutre, considérée alors comme une cantilever, est $ql^4/8EI_z$ d'après l'équation (84). La réaction R_b en *B* (fig. 159*a*) doit être telle qu'elle élimine la flèche ci-dessus. A l'aide de (95) nous obtenons alors l'équation :

$$\frac{ql^4}{8\,EI_z} = \frac{R_b l^3}{3\,EI_z}\,,$$

d'où

$$R_b = \frac{3}{8}\,ql\,.$$

4. Une poutre est sollicitée comme indiqué sur la figure 160. Déterminer le moment fléchissant M_a et les réactions R_a et R_b des appuis.

Réponse.

$$-M_a = \frac{ql^2}{8} + \frac{7}{120} q_1 l^2, \quad R_a = \frac{5}{8} ql + \frac{9}{40} q_1 l, \quad R_b = \frac{3}{8} ql + \frac{11}{40} q_1 l.$$

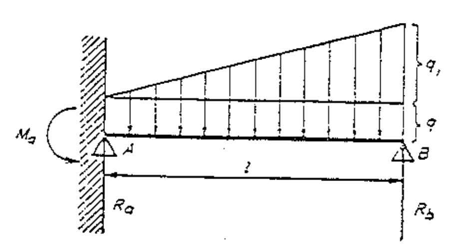


Fig. 160.

5. Déterminer la réaction R_b sur l'appui B de la poutre uniformément chargée de la figure 159. On suppose que cet appui est élastique de manière qu'une force d'intensité k, dirigée vers le bas, l'abaisse d'une longueur égale à l'unité.

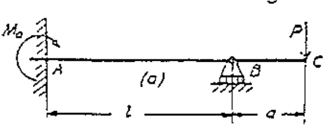
Solution. Utilisons la même méthode qu'au problème 3 ci-dessus, l'équation qui permet de calculer R_b est

$$\frac{ql^4}{8 EI_z} - \frac{R_b l^3}{3 EI_z} = \frac{R_b}{k},$$

d'où

$$R_b = \frac{3}{8} ql \frac{1}{1 + \frac{3 EI_z}{kl^3}}.$$

6. Construire les diagrammes du moment fléchissant et de l'effort tranchant d'une poutre chargée uniformément, en appui au milieu et aux extrémités.



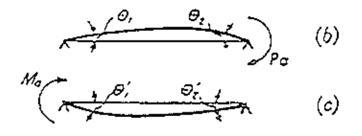


Fig. 161.

Suggestion. D'après la condition de symétrie la section du milieu ne bouge pas pendant la flexion et chaque moitié de poutre se comporte comme une poutre encastrée à une extrémité et en appui simple sur l'autre.

7. Déterminer la flèche au droit de l'extrémité C de la poutre de la figure 161.

Solution. Remplaçons l'action du porte-à-faux par un couple Pa, la flexion de la poutre entre appuis s'obtient en superposant les cas (b) et (c) de la figure 161. Utilisons les formules (103) et (104) de la page 158, on trouve, d'après $\theta_2 = -\theta_1'$, le couple M_a statiquement indéterminé, ou

$$\frac{Pal}{6 EI_z} = \frac{M_a l}{3 EI_z},$$

d'où $M_a = Pa/2$. La flèche en C est

$$\delta = \frac{Pa^3}{3 EI_z} + a(\theta_2 - \theta_2') = \frac{Pa^3}{3 EI_z} + \frac{Pa^2 l}{4 EI_z}.$$

Le premier terme du second membre représente la flèche d'une cantilever et le second représente la flèche due à la rotation de la section de poutre en B.

8. Déterminer la pression supplémentaire que la poutre AB exerce sur l'appui B (fig. 157) lorsqu'elle est soumise à un échauffement non uniforme tel que la température varie linéairement de t_0, sur la face inférieure, à t sur la face supérieure ($t > t_0$).

Solution. Si l'on retire l'appui B, l'échauffement non uniforme provoque le fléchissement de la poutre en arc de cercle. On détermine le rayon de ce cercle par l'équation $1/r = \alpha(t - t_0)/h$, dans laquelle h représente la hauteur de la poutre et α le coefficient de dilatation thermique. La flèche correspondante en B s'obtient comme au problème 2, page 94 :

$$\delta = \frac{l^2}{2r} = \frac{l^2 \alpha (t - t_0)}{2h}.$$

La réaction de l'appui B annule cette flèche. Soit R_b cette réaction, nous obtenons

$$\frac{R_b l^3}{3 EI_z} = \frac{l^2 \alpha (t - t_0)}{2h}$$

d'où

$$R_b = \frac{3 EI_z}{2 hl} \cdot \alpha (t - t_0).$$

9. Une cantilever AB (fig. 162), sollicitée en B, repose sur une cantilever plus courte CD mais ayant même section. Déterminer la pression X qui règne entre les deux poutres au point C.

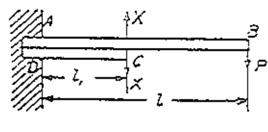


Fig. 162.

Solution. On calcule X d'après la condition suivant laquelle les deux poutres cantilever ont même flèche en C. Utilisons l'équation (95) pour la

cantilever inférieure et les équations (97), (95) pour la poutre supérieure, nous obtenons

$$\frac{Xl_1^3}{3\,EI_z} = \frac{P}{EI_z}\left(\frac{ll_1^2}{2} - \frac{l_1^3}{6}\right) - \frac{Xl_1^3}{3\,EI_z},$$

d'où

$$X = \frac{3\,P}{4}\left(\frac{l}{l_1} - \frac{1}{3}\right).$$

Si l'on considère les diagrammes du moment fléchissant des poutres cantilever, on conclut qu'en C la poutre supérieure a une déformation angulaire supérieure à celle de la cantilever inférieure. Ceci prouve que les deux poutres ne sont en contact qu'aux points D et C.

10. Résoudre le problème 7 en remplaçant la charge concentrée P par une charge uniforme d'intensité q répartie (1) suivant la longueur a du porte-à-faux, (2) sur toute la longueur de la poutre. Tracer les diagrammes du moment fléchissant et de l'effort tranchant dans ces deux cas.

11. Construire les diagrammes du moment fléchissant et de l'effort tranchant dans le cas de la figure 158, pour $a = 1{,}20$ m, $b = 3{,}60$ m, $l = 4{,}5$ m et $q = 5\,000$ N/m.

42. Poutre encastrée aux deux extrémités

Dans ce cas (fig. 163) nous avons six éléments de réaction (trois à chaque extrémité), si bien que le problème comporte trois éléments statiquement indéterminés. Toutefois, pour des poutres ordinaires, on néglige les composantes horizontales des réactions (voir p. 172), ce qui réduit à deux les quantités statiquement indéterminées. Prenons comme éléments statiquement indéterminés les moments fléchissants M_a et M_b aux appuis. Dans le cas d'une charge unique concentrée P (fig. 163*a*), on résout le problème en combinant les schémas statiquement déterminés des figures 163*b* et *c*. Il est évident que les conditions aux extrémités encastrées de la poutre AB sont satisfaites si les couples M_a et M_b sont tels que

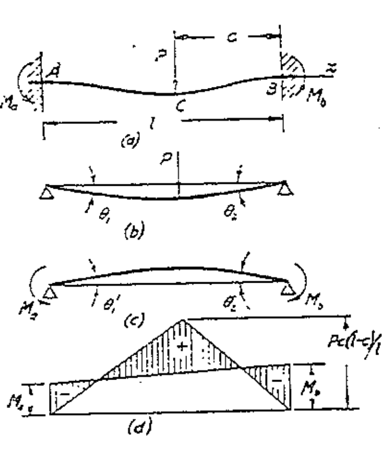


Fig. 163.

$$\theta_1 = -\theta_1', \qquad \theta_2 = -\theta_2'. \qquad (a)$$

On obtient par ces équations les deux couples statiquement indéterminés. Utilisons les équations (88) et (89) d'une charge concentrée et les équations (103), (104) des couples, les expressions (*a*) s'écrivent :

$$-\frac{Pc\,(l^2 - c^2)}{6\,lEI_z} = \frac{M_a l}{3\,EI_z} + \frac{M_b l}{6\,EI_z},$$

$$-\frac{Pc\,(l-c)\,(2\,l-c)}{6\,lEI_z} = \frac{M_a l}{6\,EI_z} + \frac{M_b l}{3\,EI_z},$$

d'où

$$M_a = -\frac{Pc^2\,(l-c)}{l^2}, \qquad M_b = -\frac{Pc\,(l-c)^2}{l^2}. \qquad (111)$$

Les deux moments fléchissants sont nuls et produisent une flexion convexe vers le haut. Combinant les diagrammes des moments fléchissants des cas (*b*) et (*c*), on obtient celui de la figure 163*d*. On constate que le moment fléchissant maximum, positif, du cas de la figure 163*d*, se situe au point C sous la charge. On détermine sa grandeur par la figure 163*d* et sa valeur par l'expression :

$$M_c = \frac{Pc\,(l-c)}{l} + \frac{M_a c}{l} + \frac{M_b\,(l-c)}{l} = \frac{2\,Pc^2\,(l-c)^2}{l^3}. \qquad (112)$$

Toujours d'après la figure 163*d*, on remarque que le moment fléchissant, le plus grand en valeur absolue, apparaît soit en C, soit à l'appui le plus voisin. Dans le cas d'une charge mobile, c'est-à-dire lorsque c varie, si l'on suppose $c < l/2$, la valeur numérique maximum de M_b s'obtient pour $c = l/3$ dans l'équation (111). Ce maximum est égal à $4\,Pl/27$. Le moment fléchissant au droit de la charge est maximum pour $c = l/2$ et il est égal à $Pl/8$, d'après l'équation (112). Donc, pour une charge mobile, le moment atteint sa plus grande valeur sur l'appui.

En utilisant la méthode de superposition on obtient la flèche en un point quelconque de la poutre par combinaison de la flèche produite par la charge P avec celle produite par les couples M_a et M_b.

Connaissant la solution pour une charge concentrée unique P, on étudie aisément tout autre type de charge transversale par la méthode de superposition.

Problèmes

1. Construire le diagramme de l'effort tranchant du cas de la figure 163*a*, sachant que $P = 500$ daN, $l = 3{,}60$ m, $c = 1{,}20$ m.

2. Trouver les moments fléchissants aux extrémités de la poutre sollicitée aux tiers à partir des extrémités (fig. 164). Construire les diagrammes du moment fléchissant et de l'effort tranchant.

Réponse. $M_a = M_b = -\frac{2}{9} Pl$.

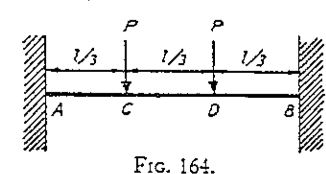


FIG. 164.

3. Résoudre le problème précédent lorsque la force en D est dirigée en sens inverse.

Réponse. $M_a = -M_b = -\frac{2}{27} Pl$.

4. Construire le diagramme du moment fléchissant d'une poutre chargée uniformément, à extrémités encastrées (fig. 165).

Solution. Le moment fléchissant en A produit par un élément $q\,dc$ de la charge (fig. 165a) est, d'après (111),

$$dM_a = -\frac{qc^2(l-c)\,dc}{l^2}.$$

Le moment dû à la charge appliquée à toute la portée est

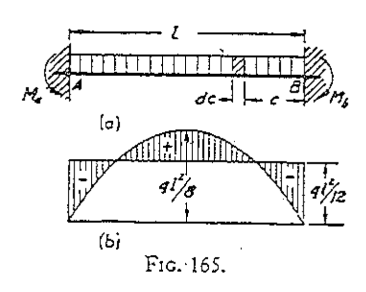


FIG. 165.

$$M_a = -\int_0^l \frac{qc^2(l-c)\,dc}{l^2} = -\frac{ql^2}{12}.$$

Le moment en B a même valeur. Combinons le moment fléchissant parabolique, produit par la charge uniforme, avec le diagramme rectangulaire donné par deux couples égaux appliqués aux extrémités, nous obtenons le diagramme représenté sur la figure 165b par l'aire hachurée.

5. Déterminer les moments fléchissants aux extrémités d'une poutre à extrémités encastrées et sollicitée par la charge triangulaire de la figure 166.

Solution. L'intensité de la charge à une distance c de l'appui B est égale à $q_a c/l$, et la charge représentée par l'élément hachuré est égale à $q_a c\,dc/l$. Les moments fléchissants s'exerçant aux extrémités, produits par la charge élémentaire, sont d'après (111) :

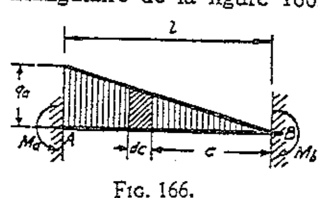


FIG. 166.

$$dM_a = -\frac{q_a c^3 (l-c)\,dc}{l^3}, \qquad dM_b = -\frac{q_a c^2 (l-c)^2\,dc}{l^3}.$$

Donc

$$M_a = -\int_0^l \frac{q_a c^3 (l-c)\,dc}{l^3} = -\frac{q_a l^2}{20},$$

$$M_b = -\int_0^l \frac{q_a c^2 (l-c)^2 dc}{l^3} = -\frac{q_a l^2}{30}.$$

6. Déterminer les moments fléchissants M_a, M_b d'une poutre à extrémités encastrées et fléchie par un couple Pc (fig. 167).

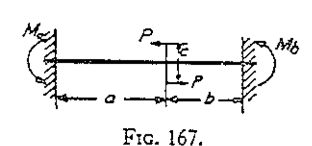


FIG. 167.

Solution. Grâce à la solution du problème 4, page 154, et des équations (103), (104), on obtient les équations suivantes :

$$2M_a + M_b = -\frac{3Pc}{l^3}\left[a^2\left(b+\frac{a}{3}\right) - \frac{2}{3}b^3\right],$$

$$2M_b + M_a = -\frac{3Pc}{l^3}\left[\frac{2}{3}a^3 - b^2\left(a+\frac{b}{3}\right)\right],$$

d'où l'on tire aisément M_a et M_b.

7. Déterminer les moments fléchissants aux extrémités d'une poutre encastrée, dus à un échauffement non uniforme de celle-ci, sachant que la température varie suivant une loi linéaire de t_0, à la base, à t au sommet de la poutre.

Réponse. $M_a = M_b = \dfrac{\alpha EI_z(t-t_0)}{h}$,

où α est le coefficient de dilatation thermique et h la hauteur de la poutre.

8. Déterminer l'influence sur la force de réaction et sur le couple de réaction en A d'un faible déplacement vertical δ de cette extrémité encastrée A de la poutre AB (fig. 163).

Solution. On retire l'appui A, alors la flèche δ_1 en A et la pente θ_1 en ce point se déterminent comme pour une poutre cantilever encastrée en B et sollicitée par P, c'est-à-dire,

$$\delta_1 = \frac{Pc^3}{3EI_z} + \frac{Pc^2}{2EI_z}(l-c), \qquad \theta_1 = \frac{Pc^2}{2EI_z}.$$

Appliquons en A une force de réaction X, dirigée vers le haut et un couple de réaction Y de même sens que M_a, et dont la valeur supprime la pente θ_1 et rend la flèche égale à δ, les équations déterminant les inconnues X et Y deviennent :

$$\frac{Xl^2}{2\,EI_z} - \frac{Yl}{EI_z} = \frac{Pc^2}{2\,EI_z},$$

$$\frac{Xl^3}{3\,EI_z} - \frac{Yl^2}{2\,EI_z} = \delta_1 - \delta.$$

9. Construire les diagrammes de l'effort tranchant et du moment fléchissant de la poutre représentée sur la figure 166, sachant que $q_a = 5\,000$ N/m et $l = 4{,}50$ m.

10. Construire les diagrammes de l'effort tranchant et du moment fléchissant d'une poutre à extrémités encastrées. La moitié gauche de la poutre supporte une charge uniforme $q = 5\,000$ N/m, la longueur de la poutre est $l = 5$ m.

43. Cadres

On peut aussi appliquer la méthode des poutres statiquement indéterminées à l'étude des cadres ou portiques. Prenons, par exemple, le cadre symétrique de la figure 168, articulé en C et D, chargé symétriquement.

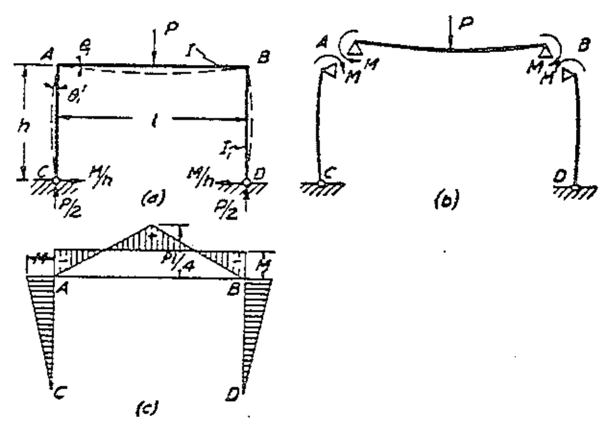


FIG. 168.

La ligne en tirets indique la forme du cadre après déformation. Négligeons la variation des barres et l'influence des efforts axiaux sur la flexion des barres [3], on considère que le cadre est formé de trois poutres (voir fig. 168*b*). Il est évident qu'il existe des couples M, aux extrémités de la poutre horizontale AB, qui s'opposent à la libre rotation de ces extrémités et représentent l'action des barres verticales sur la poutre horizontale. On considère ces couples M comme les seules quantités statiquement indéterminées. Connaissant M, on étudie sans difficultés la flexion des trois barres. Pour déterminer M nous exprimons la condition de rigidité de l'assemblage des barres en A et B de manière que la rotation du sommet vertical de la barre AC soit égale à la rotation de l'extrémité gauche de la barre horizontale. Par suite, l'équation permettant de déterminer M est

$$\theta_1 = \theta_1'\,; \qquad (a)$$

θ_1 étant déterminé par la flexion de la poutre horizontale AB. Soit l la longueur de cette poutre et EI sa rigidité à la flexion, la rotation de l'extrémité A, provoquée par la charge P, est égale à $Pl^2/16\,EI$ d'après l'équation (88) dans laquelle on remplace b par $l/2$. Les couples aux extrémités s'opposent à cette flexion et provoquent une rotation en sens inverse, qui, d'après les équations (103) et (104), est égale à $Ml/2\,EI$. La valeur finale de l'angle de rotation est

$$\theta_1 = \frac{Pl^2}{16\,EI} - \frac{Ml}{2\,EI}.$$

Considérons alors la barre verticale AC comme une poutre en appui aux extrémités, fléchie par un couple M, et soit h sa longueur, EI_1 sa rigidité à la flexion, l'angle au sommet est, d'après (104),

$$\theta_1' = \frac{Mh}{3\,EI_1}.$$

Remplaçons dans (*a*), il vient

$$\frac{Pl^2}{16\,EI} - \frac{Ml}{2\,EI} = \frac{Mh}{3\,EI_1},$$

(3) Nous étudierons dans la seconde partie l'action simultanée de la flexion et de la poussée.

d'où

$$M = \frac{Pl}{8}\frac{1}{1+\frac{2}{3}\frac{h}{l}\frac{I}{I_1}}. \qquad (113)$$

C'est la valeur absolue de M. La figure 168b en donne le sens. Connaissant M, on peut construire le diagramme du moment fléchissant (voir fig. 168c). Les réactions aux nœuds C et D sont aussi représentées sur la figure 168a. Par raison de symétrie, les composantes verticales de ces forces sont égales chacune à $P/2$. En ce qui concerne les composantes horizontales, leur valeur M/h s'obtient en considérant les barres verticales comme des poutres en appui simple soumises à des couples M au sommet.

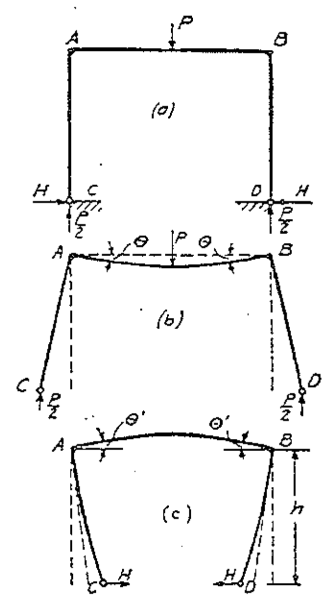


Fig. 169.

On peut résoudre le même problème par une autre méthode qui consiste à prendre comme élément statiquement indéterminé les réactions horizontales H aux nœuds C et D, au lieu de M (fig. 169). La résolution du problème hyperstatique s'opère par superposition des deux problèmes statiquement déterminés des figures 169b et 169c. Dans le cas (b) on supprime la liaison surabondante qui s'oppose au mouvement horizontal des articulations C et D. Les barres verticales ne subissent plus la moindre flexion. La barre horizontale AB se trouve dans la condition d'une barre à extrémités en appui simple dont les angles de rotation sont égaux à $Pl^2/16\,EI$; le mouvement horizontal de chaque nœud C, D est donc égal à $h\,(Pl^2/16\,EI)$. Dans le cas (c) on a tenu compte de l'influence des efforts H. Ils produisent des couples de flexion Hh sur les extrémités de la barre horizontale AB, de sorte que les angles de rotation θ' de ses extrémités sont égaux à $Hhl/2\,EI$. La flèche de chaque articulation C, D se compose de deux parties : la flèche $\theta' h = Hh^2l/2\,EI$, due à la rotation de l'extrémité supérieure, et la flèche $Hh^3/3\,EI_1$ des barres verticales assimilées à des cantilevers. Dans le cas présent (fig. 169a), les nœuds C et D ne bougent pas. Par suite, les déplacements horizontaux, dus à l'effort P (fig. 169b), sont contrariés par les efforts H (fig. 169c), c'est-à-dire,

$$\frac{Pl^2}{16\,EI}h = \frac{Hh^2l}{2\,EI} + \frac{Hh^3}{3\,EI_1},$$

d'où

$$H = \frac{1}{h}\frac{Pl}{8}\frac{1}{1+\frac{2}{3}\frac{h}{l}\frac{I}{I_1}}.$$

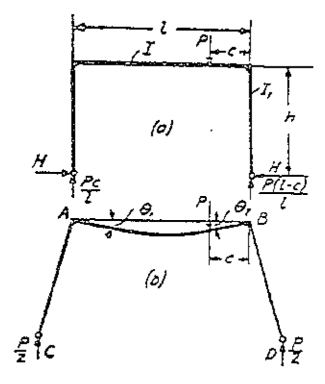


Fig. 170.

Comme $Hh = M$, ce résultat concorde avec l'équation (113).

Cette dernière méthode d'analyse est spécialement utile dans le cas de sollicitations non symétriques (voir fig. 170). Si l'on supprime la liaison empêchant le déplacement horizontal des nœuds C et D, nous tombons dans le cas de la figure 170b. L'accroissement de l'écart entre C et D s'obtient évidemment en multipliant par h la somme des angles θ_1 et θ_2. Utilisons les équations (88) et (89), cet accroissement devient

$$h\left[\frac{Pc\,(l^2-c^2)}{6\,l\,EI} + \frac{Pc\,(l-c)\,(2\,l-c)}{6\,l\,EI}\right] = \frac{Pc\,(l-c)\,h}{2\,EI}.$$

Il est déterminé par les réactions horizontales H (fig. 169c). Par suite, en utilisant les résultats obtenus dans le problème précédent, nous aboutissons à l'équation qui détermine H :

$$2\left(\frac{Hh^2\,l}{2\,EI} + \frac{Hh^3}{3\,EI_1}\right) = \frac{Pc\,(l-c)\,h}{2\,EI},$$

d'où

$$H = \frac{Pc\,(l-c)}{2\,hl}\frac{1}{1+\frac{2}{3}\frac{h}{l}\frac{I}{I_1}}. \qquad (114)$$

A partir de la solution du cas de charge concentrée, on étudie aisément, par superposition, tout autre cas de sollicitation d'une poutre AB du cadre.

Considérons alors un cadre à appuis encastrés et sollicité dissymétriquement comme sur la figure 171. Nous avons trois éléments de réaction en chaque appui et le système possède trois éléments statiquement indéterminés. Pour la résolution de ce problème, utilisons une méthode fondée sur la méthode de superposition et dans laquelle le système de charge donné est décomposé en un système de charges partielles pour chacune desquelles on

peut écrire une solution simple [4]. Le problème de la figure 171*a* se résout par superposition des solutions des deux problèmes de la figure 171*b* et 171*c*. Le cas représenté en (*b*) est symétrique et se traite de la même manière que le premier exemple de la figure 168. Une étude du cas de la figure (*c*) montre que le point d'inflexion *O* de la barre horizontale *AB* se situe au milieu de celle-ci. Ceci résulte du fait que les charges $P/2$ sont équidistantes de l'axe de symétrie vertical du cadre et ont des sens opposés. Le moment, la flèche et l'effort axial provoqués au point *O* de la poutre horizontale *AB* par une des charges $P/2$ sont annulés par l'action de l'autre charge $P/2$. Par suite, le

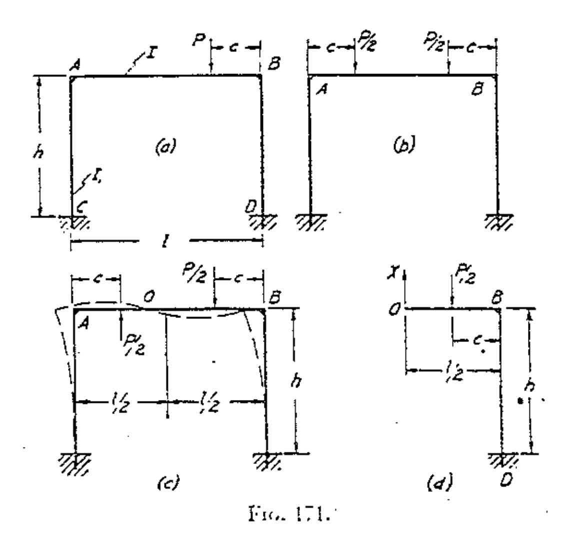


Fig. 171.

point *O* ne subira ni moment fléchissant, ni flèche verticale, ni effort axial. La valeur de l'effort tranchant *X*, au même point, se déduit de la condition de nullité de la flèche en *O* (fig. 171*d*). Cette flèche se décompose en deux parties : une flèche δ_1 due à la flexion de la cantilever *OB* et une flèche δ_2 due à la rotation de l'extrémité *B* de la barre verticale *BD*. D'après les équations d'une cantilever (éq. 98) et à l'aide des notations indiquées sur la figure, nous obtenons les équations suivantes :

$$\delta_1 = \frac{P}{2}\,\frac{c^3}{3\,EI} + \frac{P}{2}\,\frac{c^2}{2\,EI}\left(\frac{l}{2} - c\right) - \frac{X\left(\frac{l}{2}\right)^3}{3\,EI},$$

$$\delta_2 = \left(\frac{Pc}{2} - X\frac{l}{2}\right)\frac{h}{EI_1}\,\frac{l}{2}.$$

Remplaçons ces expressions dans l'équation $\delta_1 + \delta_2 = 0$, on détermine la valeur *X* de l'effort tranchant. Connaissant *X*, on calcule le moment fléchissant

(4) Cette méthode fut utilisée dans de nombreux cas par W. L. ANDRÉE, voir son ouvrage, *Das B-U Verfahren*, Berlin, 1919.

en toute section du cadre dans le cas (*c*). Combinons ce moment aux moments fléchissants du cas symétrique (*b*), on obtient la solution du problème (*a*) [5].

Problèmes

1. Trouver les efforts axiaux dans toutes les barres du cadre de la figure 168*a*.

Réponse. La compression dans les barres verticales est égale à $P/2$, dans la barre horizontale à M/h.

2. Construire le diagramme du moment fléchissant du cadre de la figure 170*a*.

3. Déterminer les moments fléchissants aux angles du cadre de la figure 172.

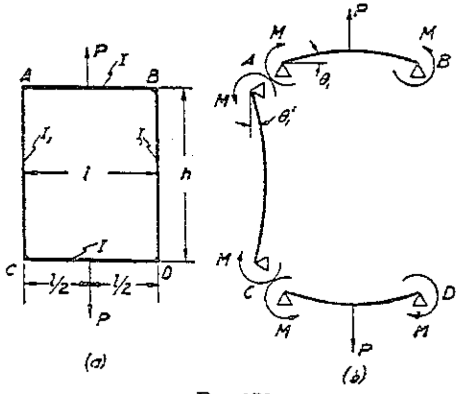


Fig. 172.

Solution. Considérons la barre *AB* comme une poutre en appui aux extrémités (fig. 172*b*) et soit *M* les moments aux angles, la rotation θ_1 est

$$\frac{Pl^2}{16\,EI} - \frac{Ml}{2\,EI}.$$

Si l'on égale cette expression à θ_1' aux extrémités des barres verticales fléchies par les couples *M* seuls, on obtient l'équation de *M* suivante :

$$\frac{Pl^2}{16\,EI} - \frac{Ml}{2\,EI} = \frac{Mh}{2\,EI_1},$$

d'où

$$M = \frac{Pl}{8}\,\frac{1}{1 + \frac{h}{l}\,\frac{I}{I_1}}.$$

(5) On trouvera plusieurs résolutions importantes concernant les cadres dans l'ouvrage de KLEINLOGEL, *Mehrstielige Rahmen*, Berlin, 1927.

4. Construire le diagramme du moment fléchissant du cadre du problème précédent.

5. Déterminer les réactions horizontales H du cas de la figure 173.

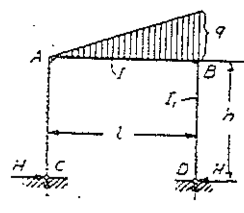


FIG. 173.

Suggestion. A l'aide de l'équation (114) et par application de la méthode de superposition, nous obtenons

$$H = \frac{ql^2}{24\,h}\,\frac{1}{1+\dfrac{2}{3}\dfrac{h}{l}\dfrac{I}{I_1}}.$$

6. Tracer le diagramme du moment fléchissant des trois barres du problème 5. On suppose que $h = l$ et $I = I_1$.

7. Déterminer les moments fléchissants aux nœuds du cadre de la figure 174.

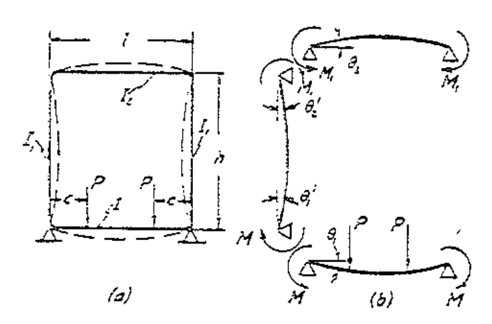


FIG. 174.

Solution. Disjoignons le cadre comme indiqué sur la figure 174*b*, les équations déterminant les couples M et M_1 sont :

$$\theta_1 = \theta_1' \quad \text{et} \quad \theta_2 = \theta_2'.$$

Substituons dans ces équations :

$$\theta_1 = \frac{Pc(l-c)}{2\,EI} - \frac{Ml}{2\,EI}, \qquad \theta_1' = \frac{Mh}{3\,EI_1} - \frac{M_1 h}{6\,EI_1},$$

$$\theta_2 = \frac{M_1 l}{2\,EI_2}, \qquad \theta_2' = \frac{Mh}{6\,EI_1} - \frac{M_1 h}{3\,EI_1}.$$

Nous obtenons M et M_1 en portant ces valeurs dans les équations précédentes.

8. Construire le diagramme du moment fléchissant et déterminer les efforts axiaux dans toutes les barres du cadre de la figure 174*a*, sachant que $h = l$ et $I = I_1 = I_2$.

9. Un cadre rectangulaire est soumis à l'action d'un effort horizontal H comme indiqué sur la figure 175. Déterminer les moments fléchissants M et M_1 aux nœuds.

Solution. La figure 175*a* donne l'allure déformée du cadre. Disjoignons le cadre, comme le montre la figure 175*b*, et appliquons des couples dont l'orientation soit compatible avec la déformée du cadre (fig. 175*a*), nous obtenons pour la barre CD,

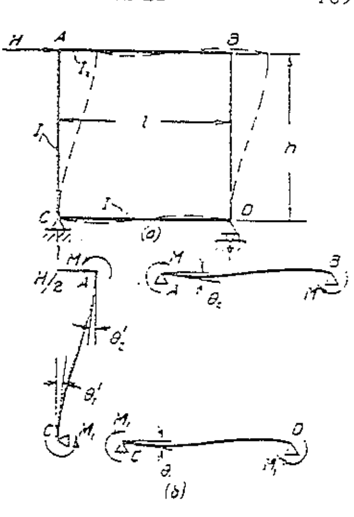


FIG. 175.

$$\theta_1 = \frac{M_1 l}{6\,EI} = \left(\frac{Hh}{2} - M\right)\frac{l}{6\,EI}. \qquad (b)$$

Assimilons alors la barre verticale AC à une cantilever encastrée en C sous l'angle θ_1, la pente en A est

$$\theta_2' = \theta_1 + \frac{H}{2}\frac{h^2}{2\,EI_1} - \frac{Mh}{EI_1}. \qquad (c)$$

Finalement, en raison de la flexion de la barre AB,

$$\theta_2 = \theta_2' = \frac{Ml}{6\,EI_2}. \qquad (d)$$

Par suite, d'après les équations (*b*), (*c*) et (*d*),

$$M = \frac{Hh}{2}\left(1 + \frac{3h}{l}\frac{I}{I_1}\right)\frac{1}{1+\dfrac{I}{I_2}+6\dfrac{h}{l}\dfrac{I}{I_1}}. \qquad (e)$$

Remplaçons M par sa valeur dans (*b*) on obtient le moment fléchissant M_1. Lorsque la barre horizontale CD est très rigide, l'on approche des conditions du cadre de la figure 171*a* soumis à une charge transversale H. Si l'on fait $I = \infty$ dans (*e*), nous obtenons

$$M = \frac{Hh}{4}\,\frac{1}{1+\dfrac{1}{6}\dfrac{l}{h}\dfrac{I_1}{I_2}}. \qquad (f)$$

En faisant $I = 0$ dans l'équation (e), on obtient le cas du portique de la figure 168, monté sur appuis articulés et soumis à l'action d'une charge latérale appliquée en A.

10. Déterminer les réactions horizontales H et les moments fléchissants M_a, M_b aux nœuds A et B du cadre de la figure 176.

Réponse. $H = \frac{qh}{20}\frac{11m+20}{2m+3}$, $M_a = M_b = -\frac{qh^2}{60}\frac{7m}{2m+3}$,

où $m = \frac{h}{l}\frac{I}{I_1}$.

11. Un cadre se compose de deux barres assemblées rigidement en B, encastrées en A et C (fig. 177). Déterminer le moment fléchissant M en B et l'effort de compression P dans AB lorsque, en raison d'une élévation de température, la longueur de AB s'accroît de $\Delta = \alpha l(t-t_0)$.

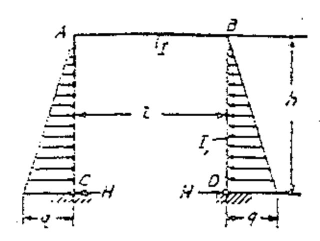


Fig. 176.

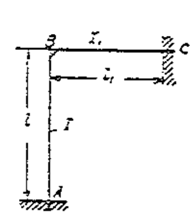


Fig. 177.

Réponse. P et M se déterminent par les équations :

$$\frac{Pl_1^3}{3EI} - \frac{Ml_1^2}{2EI} = \Delta,$$

$$\frac{Pl_1^2}{2EI} - \frac{Ml_1}{EI} = \frac{Ml}{4EI}.$$

44. Poutres sur trois appuis

Dans le cas d'une poutre reposant sur trois appuis (fig. 178a) il existe un élément de réaction statiquement indéterminé. Soit la réaction de l'appui intermédiaire cet élément indéterminé. En utilisant alors la méthode de superposition on obtient la solution du cas (a) en combinant les cas (b) et (c) de la figure 178. On trouve la réaction intermédiaire X en supposant que la flèche δ, produite en C par la charge P, est éliminée par

cette réaction X. Utilisons l'équation (86), nous obtenons l'équation en fonction de X :

$$\frac{Pcl_1[(l_1+l_2)^2-c^2-l_1^2]}{6(l_1+l_2)EI_z} = \frac{Xl_1^2l_2^2}{3(l_1+l_2)EI_z},$$

d'où

$$X = \frac{Pc[(l_1+l_2)^2-c_2-l_1^2]}{2l_1l_2^2}. \quad (115)$$

Lorsque P s'exerce sur la travée gauche de la poutre, on utilise la même équation, mais la distance c se mesure à partir de l'appui A et l'on permute l_1 et l_2. Pour $l_1 = l_2 = l$, nous avons d'après (115),

$$X = \frac{Pc(3l^2-c^2)}{2l^3}. \quad (116)$$

La solution du cas de charge unique P permet l'étude de tout autre cas de charge par application de la méthode de superposition.

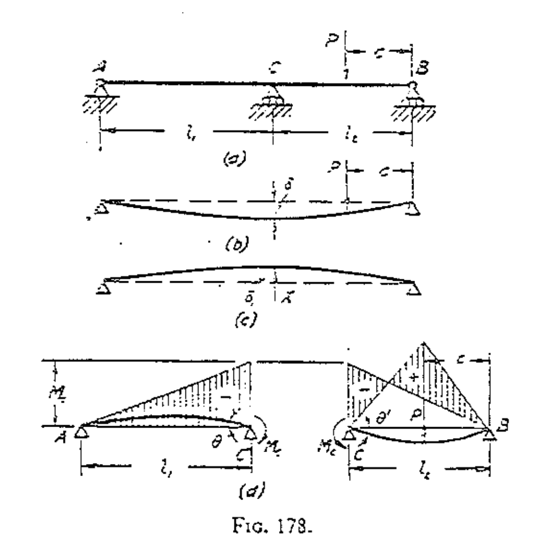


Fig. 178.

On peut résoudre le même problème autrement. Imaginons que la poutre soit coupée en deux parties en C (fig. 178d), et soit M_c la valeur du moment fléchissant de la poutre primitive dans cette section. On ramène ainsi le problème à la résolution de deux systèmes statiquement déterminés composés de deux poutres en appui simple (fig. 178d). On détermine M_c par la condition de continuité de la ligne élastique en C.

Il s'ensuit (*) que $\theta = \theta'$, d'où, en utilisant les équations (88), page 140 et (104), page 153, et en supposant que M_c est positif, nous obtenons

$$-\frac{M_c l_1}{3\,EI_z} = \frac{Pc\,(l_2^2 - c^2)}{6\,l_2 EI_z} + \frac{M_c l_2}{3\,EI_z},$$

et l'on tire

$$M_c = -\frac{Pc\,(l_2^2 - c^2)}{2\,l_2\,(l_1 + l_2)}. \tag{117}$$

Donc M_c est négatif et dirigé comme l'indique la figure 178*d*. L'aire hachurée de la figure 178*d* représente le diagramme du moment fléchissant.

Problèmes

1. Démontrer que la valeur du moment fléchissant M_c donné par (117), dans le cas de la figure 178, est la même que celle obtenue, par l'équation (115), pour la section *C*.

2. Tracer le diagramme de l'effort tranchant de la poutre du problème précédent, sachant que $l_1 = l_2$, $c = l_2/2$ et $P = 5$ kN.

3. Une poutre sur trois appuis (fig. 178*a*) supporte une charge q uniformément répartie. Déterminer le moment fléchissant sur l'appui *C*.

Solution. Appliquons la méthode de superposition et substituons $q\,dc$ à P dans l'équation (117). L'intégration le long des deux travées nous donne

$$M_c = -\int_0^{l_2} \frac{qc\,(l_2^2 - c^2)\,dc}{2\,l_2\,(l_1 + l_2)} - \int_0^{l_1} \frac{qc\,(l_1^2 - c^2)\,dc}{2\,l_1\,(l_1 + l_2)} = -\frac{q}{8}\,\frac{l_2^3 + l_1^3}{l_1 + l_2},$$

et lorsque

$$l_1 = l_2 = l, \qquad M_c = -\frac{ql^2}{8}.$$

La direction du couple M est celle indiquée sur la figure 178*d*.

4. Construire le diagramme de l'effort tranchant du problème précédent, en supposant que $l_1 = l_2$ et $q = 744$ daN/m.

5. Déterminer la valeur absolue du moment fléchissant maximum de la poutre *ABC* (fig. 178*a*), sachant que $P = 4\,536$ daN, $l_1 = 2{,}75$ m, $l_2 = 3{,}67$ m, $c = 1{,}84$ m.

Réponse. $M_{max} = 3{,}263$ m · daN.

(*) L'angle θ est positif si la rotation s'effectue dans le sens des aiguilles d'une montre.

6. Une poutre sur trois appuis équidistants supporte une charge uniformément répartie d'intensité q. Quelle est l'influence, sur la réaction de l'appui du milieu, d'un abaissement δ de cet appui ?

Solution. Appliquons la méthode indiquée sur les figures 178*b* et 178*c*, on obtient la réaction X au milieu par l'équation :

$$\frac{5}{384}\,\frac{q\,(2\,l)^4}{EI} = \frac{X\,(2\,l)^3}{48\,EI} + \delta,$$

d'où

$$X = \frac{5}{8}\,2\,ql - \frac{6\,\delta EI}{l^3}.$$

7. Déterminer la pression supplémentaire qu'exerce la poutre *AB* sur l'appui *C* (fig. 178*a*) lorsqu'elle est soumise à un échauffement non uniforme tel que sa température varie linéairement de t sur sa face inférieure, à t_1 sur sa face supérieure. On suppose que $t > t_1$ et $l_1 = l_2 = l$.

Solution. Si nous supprimons l'appui *C*, en raison même de l'échauffement non uniforme, la ligne élastique de la poutre devient un arc de cercle. Son rayon est déterminé par

$$\frac{1}{r} = \frac{\alpha\,(t - t_1)}{h},$$

où h désigne la hauteur de la poutre et α le coefficient de dilatation thermique. La flèche correspondante, au milieu, est $\delta = l^2/2r$ et la réaction X en C s'obtient à l'aide de l'équation :

$$\frac{X\,(2\,l)^3}{48\,EI} = \delta.$$

8. Déterminer le diagramme du moment fléchissant de la poutre *ABC* en appui sur trois pontons (fig. 179). L'aire de section droite horizontale de chaque ponton est A et le poids spécifique de l'eau γ.

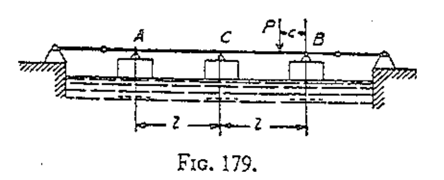


Fig. 179.

Solution. Supprimons l'appui *C*, la flèche δ produite en ce point par la charge P se décompose en deux parties : la flèche due à la flexion de la poutre et la flèche due à l'immersion des pontons *A* et *B*. D'après (91), nous obtenons

$$\delta = \frac{Pc}{48\,EI_z}\,[3\,(2\,l)^2 - 4\,c^2] + \frac{P}{2\,A\gamma}. \tag{a}$$

La réaction X de l'appui du milieu réduit la flèche ci-dessus de la quantité

$$\frac{X(2l)^3}{48\,EI_z} + \frac{X}{2\,A\gamma}. \qquad (b)$$

La différence entre (a) et (b) représente la hauteur d'immersion $X/A\gamma$ du ponton central, et par suite l'on obtient l'équation en X :

$$\frac{Pc}{48\,EI_z}[3\,(2l)^2 - 4\,c^2] + \frac{P}{2\,A\gamma} - \frac{X(2l)^3}{48\,EI_z} - \frac{X}{2\,A\gamma} = \frac{X}{A\gamma}.$$

Connaissant X, on construit aisément le diagramme du moment fléchissant.

45. Poutres continues

On suppose généralement, dans le cas d'une poutre continue sur plusieurs appuis (fig. 180), qu'un des appuis est constitué par une articulation fixe tandis que les autres sont des appuis montés sur rouleaux. Ainsi,

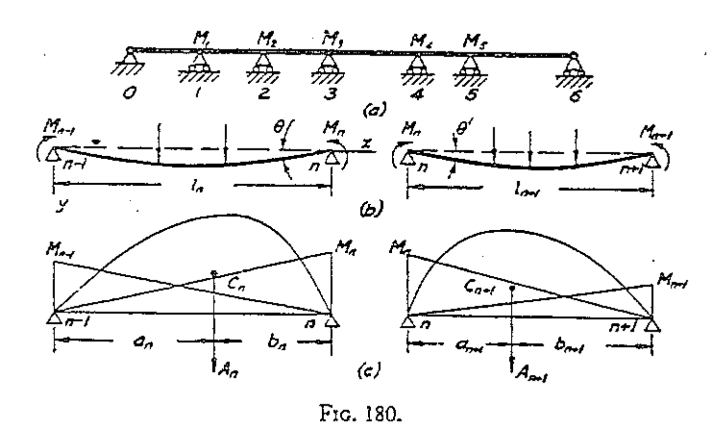


FIG. 180.

chaque appui intermédiaire ne possède qu'un élément de réaction inconnu : la réaction verticale. Par suite, le nombre d'éléments statiquement indéterminés est égal au nombre d'appuis intermédiaires. Par exemple, dans le cas de la figure 180*a* nous avons cinq éléments statiquement indéterminés. On peut encore appliquer ici les deux méthodes exposées au paragraphe précédent. Mais lorsque le nombre d'appuis est important, la seconde méthode, dans laquelle les moments fléchissants sur les appuis sont considérés comme éléments statiquement indéterminés, est de beaucoup la plus simple. La figure 180*b* représente deux travées adjacentes n et $n+1$ d'une poutre continue sectionnée aux appuis $n-1$, n et $n+1$.

Soit M_{n-1}, M_n, M_{n+1} les moments fléchissants sur ces appuis. Les directions de ces moments dépendent des charges sur la poutre. Nous admettrons que leur sens est positif lorsqu'ils sont dirigés comme indiqué sur la figure (7). Il est évident que si l'on connaît les moments fléchissants aux appuis le problème des poutres continues se réduit au calcul d'autant de poutres en appui simple qu'il y a de travées dans la poutre continue. On utilisera, pour déterminer les moments fléchissants M_{n-1}, M_n, M_{n+1}, la condition de continuité de la ligne élastique sur les appuis. En tout appui n cette condition est satisfaite si les lignes élastiques de deux travées adjacentes ont une tangente commune en n, c'est-à-dire, lorsque la pente à l'extrémité droite de la travée n est égale à la pente à l'extrémité gauche de la travée $n+1$. On utilise la méthode du moment des aires pour calculer ces pentes. Soit A_n l'aire du diagramme du moment fléchissant, dû à la charge réelle s'exerçant sur la travée n (fig. 180*c*) considérée comme une poutre en appui simple. Soit a_n et b_n les distances horizontales séparant le centre de gravité C_n, du moment des aires, des appuis $n-1$ et n. La pente à l'extrémité droite est alors, dans ce cas de charge (voir § 36),

$$-\frac{A_n a_n}{l_n EI_z}.$$

En plus de la flèche provoquée par la charge s'exerçant sur la travée même, celle-ci est aussi déformée par les couples M_{n-1} et M_n. D'après les équations (103) et (104) la pente produite par ces couples sur l'appui n est

$$-\left(\frac{M_n l_n}{3\,EI_z} + \frac{M_{n-1} l_n}{6\,EI_z}\right).$$

La rotation totale est alors (8)

$$\theta = -\left(\frac{M_n l_n}{3\,EI_z} + \frac{M_{n-1} l_n}{6\,EI_z} + \frac{A_n a_n}{l_n EI_z}\right). \qquad (a)$$

De la même manière, pour l'extrémité gauche de la travée $n+1$, nous obtenons

$$\theta' = \frac{A_{n+1} b_{n+1}}{l_{n+1} EI_z} + \frac{M_n l_{n+1}}{3\,EI_z} + \frac{M_{n+1} l_{n+1}}{6\,EI_z}. \qquad (b)$$

(7) Si l'on trouve, en définitive, certains moments négatifs, ils seront évidemment dirigés en sens inverse de celui porté sur la figure 180*b*.

(8) L'angle est positif si la rotation s'effectue dans le sens des aiguilles d'une montre.

Il découle de la condition de continuité que

$$\theta = \theta' . \qquad (c)$$

Substituons (*a*) et (*b*) dans cette expression, nous obtenons

$$M_{n-1} l_n + 2 M_n (l_n + l_{n+1}) + M_{n+1} l_{n+1} = -\frac{6 A_n a_n}{l_n} - \frac{6 A_{n+1} b_{n+1}}{l_{n+1}} . \qquad (118)$$

C'est *l'équation des trois moments* (⁹). Evidemment le nombre de ces équations est égal au nombre d'appuis intermédiaires, et l'on calcule donc aisément les moments fléchissants sur les appuis.

Jusqu'à présent nous avons supposé que les extrémités de la poutre continue étaient en appui simple. Si, au contraire, l'une ou les deux extrémités sont encastrées, alors le nombre de quantités statiquement indéterminées est supérieur au nombre d'appuis intermédiaires ; il faut alors calculer des équations supplémentaires pour exprimer que les extrémités encastrées ne subissent pas de rotation (voir prob. 5 ci-dessous).

Connaissant les moments aux appuis, on calcule sans difficultés les réactions aux appuis d'une poutre continue. Prenons, par exemple, le cas de deux travées voisines n et $n+1$ (fig. 180*b*) et considérons-les comme des poutres en appui simple, on obtient aisément la réaction R'_n en n due aux charges sur ces deux travées. Il existe en plus une réaction due aux moments M_{n-1}, M_n et M_{n+1}. Prenons pour ces moments les directions indiquées sur la figure 180*b*, la pression supplémentaire sur l'appui n est

$$\frac{M_{n-1} - M_n}{l_n} + \frac{-M_n + M_{n+1}}{l_{n+1}} .$$

Ajoutons celle-ci à R'_n, la réaction totale est

$$R_n = R'_n + \frac{M_{n-1} - M_n}{l_n} + \frac{-M_n + M_{n+1}}{l_{n+1}} . \qquad (119)$$

Lorsque des charges concentrées sont appliquées sur les appuis, elles sont transmises directement aux appuis correspondants et s'ajoutent au second membre de l'équation (119).

(⁹) Cette équation fut établie par Bertot, *Compt. rend. soc. ing. civils*, p. 278, 1855 ; voir aussi Clapeyron, *Compt. rend.*, vol. 45, 1857.

On utilise encore l'équation générale de continuité (*c*) dans le cas où, par mauvais alignement ou par tassement, les appuis ne sont plus au même niveau (fig. 181). Soit β_n et β_{n+1} les angles d'inclinaison que font avec l'horizontale les lignes joignant les points d'appuis des n^{me} et $(n+1)^{me}$ travées. L'angle de rotation donné par (*a*) et (*b*) est mesuré à partir de la ligne joignant les centres des nœuds. Par suite, l'angle θ entre la tangente en n et l'horizontale est, pour la travée n,

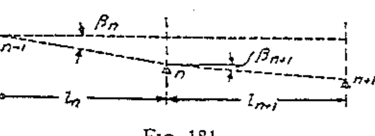


Fig. 181.

$$\theta = -\left(\frac{M_n l_n}{3 EI_z} + \frac{M_{n-1} l_n}{6 EI_z} + \frac{A_n a_n}{l_n EI_z} - \beta_n \right) .$$

De même, pour la travée $n+1$,

$$\theta' = \frac{A_{n+1} b_{n+1}}{l_{n+1} EI_z} + \frac{M_n l_{n+1}}{3 EI_z} + \frac{M_{n+1} l_{n+1}}{6 EI_z} + \beta_{n+1} .$$

Egalons ces angles, nous obtenons

$$M_{n-1} l_n + 2 M_n (l_n + l_{n+1}) + M_{n+1} l_{n+1}$$
$$= -\frac{6 A_n a_n}{l_n} - \frac{6 A_{n+1} b_{n+1}}{l_{n+1}} - 6 EI_z (\beta_{n+1} - \beta_n) . \qquad (120)$$

Si h_{n-1}, h_n, h_{n+1} représentent les hauteurs des appuis $n-1$, n, $n+1$, au-dessus de l'horizontale de référence, nous avons :

$$\beta_n = \frac{h_{n-1} - h_n}{l_n} , \qquad \beta_{n+1} = \frac{h_n - h_{n+1}}{l_{n+1}} .$$

Substituons dans (120), on obtient les moments fléchissants, dus à un mauvais alignement ou à un tassement aux appuis.

Problèmes

1. Déterminer les diagrammes du moment fléchissant et de l'effort tranchant d'une poutre continue à trois travées égales supportant une charge d'intensité q, uniformément répartie (fig. 182).

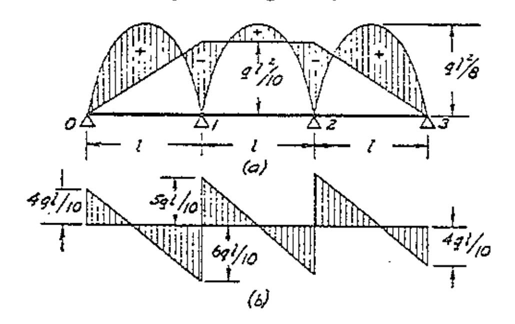


Fig. 182.

Solution. Dans le cas d'une poutre en appui simple soumise à une charge uniformément répartie, le diagramme du moment fléchissant est une parabole d'ordonnée maximum $ql_n^2/8$. L'aire du segment parabolique est

$$A_n = \frac{2}{3} l_n \frac{ql_n^2}{8} = \frac{ql_n^3}{12}.$$

Le centre de gravité est placé au-dessus du milieu de la travée, d'où $a_n = b_n = l_n/2$. Substituons dans (118), nous obtenons

$$M_{n-1}l_n + 2M_n(l_n + l_{n+1}) + M_{n+1}l_{n+1} = -\frac{ql_n^3}{4} - \frac{q(l_{n+1})^3}{4}. \quad (118')$$

Appliquons cette équation dans le cas présent (fig. 182), pour la première et seconde travée, et remarquons que sur l'appui *0* le moment fléchissant est nul, nous obtenons

$$4M_1 l + M_2 l = -\frac{ql^3}{2}. \quad (d)$$

En raison de la symétrie, $M_1 = M_2$. Alors, d'après l'équation (*d*), $M_1 = -(ql^2/10)$. Le diagramme du moment fléchissant est représenté par l'aire hachurée sur la figure 182*a*. La réaction de l'appui *0* est

$$R_0 = \frac{ql}{2} - \frac{ql^2}{10}\frac{1}{l} = \frac{4}{10}ql.$$

La réaction de l'appui *1* est

$$R_1 = ql + \frac{ql^2}{10}\frac{1}{l} = \frac{11}{10}ql.$$

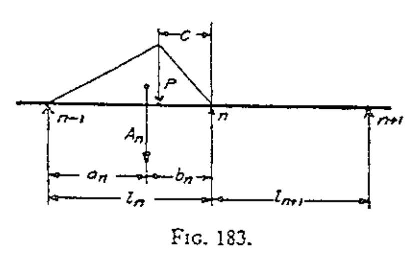


FIG. 183.

Le diagramme de l'effort tranchant est tracé sur la figure 182*b*. Le moment maximum se situe évidemment à la distance 4*l*/10 des extrémités de la poutre, où l'effort tranchant est nul. La valeur absolue du moment fléchissant maximum se situe sur les appuis intermédiaires.

2. Etablir l'expression du second membre de l'équation (118) lorsque la travée *n* subit une charge concentrée et que la travée $n+1$ est libre de toute sollicitation (fig. 183).

Solution. Dans ce cas A_n est l'aire du triangle de hauteur $Pc(l_n - c)/l_n$ et de base l_n. Par suite, $A_n = Pc(l_n - c)/2$ et $a_n = l_n - b_n = l_n - (l_n + c)/3$. Substituons dans (118), nous obtenons

$$M_{n-1}l_n + 2M_n(l_n + l_{n+1}) + M_{n+1}l_{n+1} = -\frac{Pc(l_n - c)(2l_n - c)}{l_n}.$$

3. Déterminer les moments fléchissants aux appuis et les réactions de la poutre continue de la figure 184.

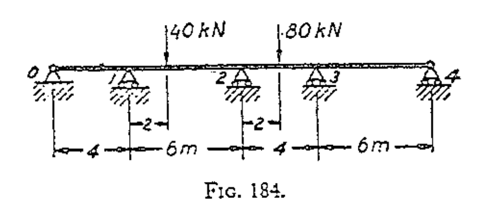


FIG. 184.

Réponse. $M_1 = -15{,}4$ m · kN ; $M_2 = -37{,}4$ m · kN ; $M_3 = -16{,}5$ m · kN. Les réactions sont $R_0 = -3{,}86$ kN ; $R_1 = 26{,}8$ kN ; $R_2 = 62{,}2$ kN ; $R_3 = 37{,}5$ kN ; $R_4 = -2{,}75$ kN. Les moments sur les appuis sont négatifs et produisent une flexion convexe vers le haut.

4. Construire les diagrammes du moment fléchissant et de l'effort tranchant de la poutre continue de la figure 185*a*, sachant que $P = ql$, $c = l/4$.

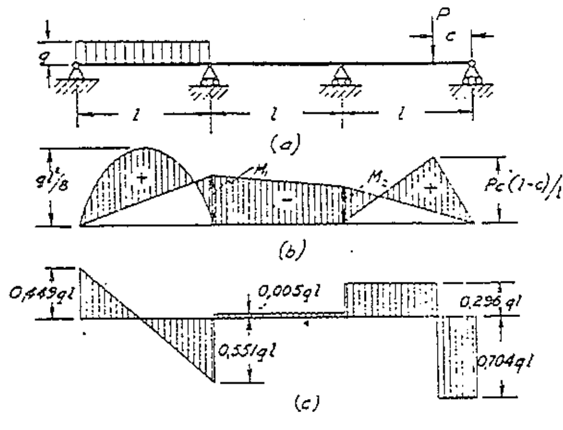


FIG. 185.

Réponse. $M_1 = -\frac{49}{960}ql^2$, $\quad M_2 = -\frac{11}{240}ql^2$.

Les diagrammes sont ceux des figures 185*b* et 185*c*.

5. Déterminer le diagramme du moment fléchissant du cas de la figure 186*a*.

Solution. L'équation (118) devient dans ce cas

$$M_0 l + 4M_1 l + M_2 l = 0.$$

Il est évident que $M_2 = -Pc$, tandis que la condition sur l'extrémité encastrée (appui 0) donne, d'après (103) et (104),

$$\frac{M_0 l}{3\,EI} + \frac{M_1 l}{6\,EI} = 0 .$$

Nous obtenons, à l'aide des équations ci-dessus, $M_0 = -\frac{1}{7}Pc$; $M_1 = +\frac{2}{7}Pc$; $M_2 = -Pc$. Le diagramme du moment fléchissant est représenté sur la figure 186b.

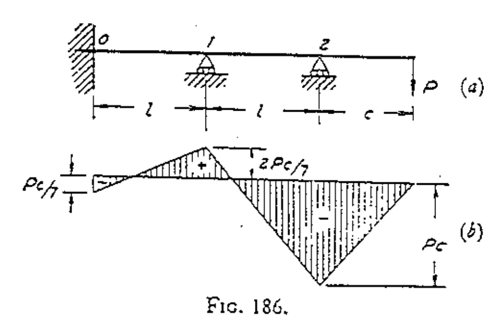


Fig. 186.

6. Déterminer les moments fléchissants aux appuis d'une poutre continue à sept travées égales lorsque seule la travée centrale supporte une charge q uniformément répartie.

Réponse.

$$M_3 = M_4 = -\tfrac{15}{284}ql^2 , \quad M_2 = M_5 = -\tfrac{4}{15}M_3 , \quad M_1 = M_6 = \tfrac{1}{15}M_3 .$$

7. Une poutre continue à quatre travées égales, ayant 5 m chacune, supporte une charge uniforme sur la dernière. Construire les diagrammes de l'effort tranchant et du moment fléchissant pour $q = 500$ daN/m.

8. Résoudre le problème 5 en supposant que la charge uniforme d'intensité q est répartie sur toute la longueur de la poutre et que $c = l/2$. Tracer le diagramme de l'effort tranchant dans ce cas.

Réponse. $M_0 = -\frac{5}{56}ql^2$, $M_1 = -\frac{1}{14}ql^2$, $M_2 = -\frac{1}{8}ql^2$.



7

POUTRES SYMÉTRIQUES DE SECTION VARIABLE POUTRES CONSTITUÉES PAR DEUX MATÉRIAUX

46. Poutres de section variable

Les poutres étudiées jusqu'ici avaient toutes une forme prismatique. Une étude plus approfondie montre que les équations (56) et (57), utilisées pour les poutres prismatiques, permettent une étude assez précise des barres à section variable, à condition que cette variation ne soit pas trop exagérée. On analysera ultérieurement (2ᵉ partie) le cas de la variation brusque de la section, dans laquelle règne une importante concentration de contraintes.

Considérons, comme premier exemple de poutre à section variable, la flèche d'une poutre cantilever d'*égale résistance*, c'est-à-dire, une poutre dont le module de section varie le long de la poutre dans le même rapport que le moment fléchissant. Donc, d'après les équations (60), on remarque que $(\sigma_x)_{max}$ reste constant sur la poutre entière et est égal à σ_W. Cette condition est satisfaisante en ce qui concerne le poids de matériau utilisé, puisqu'il suffit que chaque section ait l'aire minimum nécessaire pour satisfaire aux conditions de résistance.

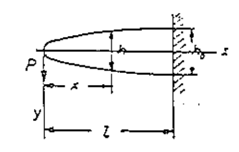


Fig. 187.

Pour une cantilever à extrémité chargée (fig. 187), le moment fléchissant d'une section située à la distance x de la charge est égal, en valeur absolue, à Px. Pour que la poutre soit d'égale résistance son module de section sera aussi proportionnel à x. Cette condition peut être remplie de plusieurs manières.

Soit une section rectangulaire de largeur constante b et de hauteur variable h (fig. 187). D'après la définition de la poutre d'égale résistance

il découle
$$\frac{M}{Z} = \frac{6\,Px}{bh^2} = \frac{6\,Pl}{bh_0^2} = \text{constante},$$

où h_0 est la hauteur de la poutre à l'extrémité encastrée. Alors

$$h^2 = \frac{h_0^2 x}{l}.$$

On remarque que dans ce cas la hauteur de la poutre varie suivant une loi parabolique. La section est nulle à l'extrémité sollicitée. Ceci est dû à la négligence de la contrainte de cisaillement lors du calcul de la forme de la poutre d'égale résistance. En pratique on tient compte de cette contrainte en modifiant quelque peu la forme de l'extrémité en charge de la poutre ; ceci afin de disposer d'une section suffisante capable de transmettre l'effort tranchant. La flèche de la poutre à l'extrémité s'obtient par l'équation (93) :

$$\delta = \int_0^l \frac{12\,Px^2\,\mathrm{d}x}{Ebh^3} = \frac{12\,Pl^{3/2}}{Ebh_0^3}\int_0^l \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\,\frac{Pl^3}{EI_0}, \tag{121}$$

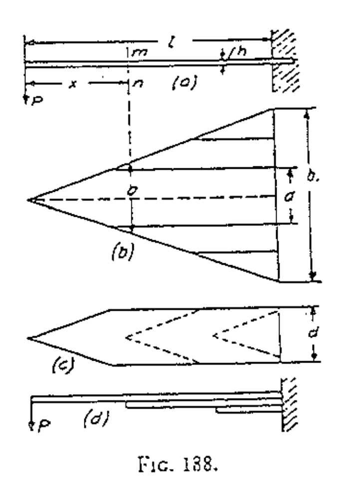


Fig. 188.

où $I_0 = bh_0^3/12$ représente le moment d'inertie de la section à l'extrémité encastrée. En comparant (121) à (95) on remarque que cette flèche est deux fois plus grande que celle d'une barre prismatique soumise aux mêmes conditions de charge, c'est-à-dire qu'elle a même résistance mais non pas même rigidité, la rigidité à la flexion de la barre prismatique est représentée par EI_0.

Considérons une cantilever à section rectangulaire de hauteur constante h et de largeur variable b (fig. 188*a* et 188*b*). Puisque le module de section et le moment d'inertie I_z d'une poutre triangulaire augmentent avec x dans la même proportion que le moment fléchissant, la contrainte maximum $(\sigma_x)_{max}$ et la courbure (voir éq. 56) restent constantes sur toute la poutre, et la valeur du rayon de courbure se détermine à l'aide de l'équation (voir éq. 55) :

$$(\sigma_x)_{max} = \frac{hE}{2r}. \tag{a}$$

Pour de faibles flèches, la flèche à l'extrémité d'un arc circulaire est

$$\delta = \frac{l^2}{2r} = \frac{Pl^3}{2\,EI_0}, \tag{122}$$

ou, à l'aide de (*a*),

$$\delta = (\sigma_x)_{max}\frac{l^2}{hE}. \tag{123}$$

On remarque, d'après cette équation, que pour ce genre de cantilever d'égale résistance, la flèche à l'extrémité varie avec le carré de la longueur et en raison inverse de la hauteur.

Ces résultats permettent l'évaluation approchée des contraintes et des flèches d'un *ressort à lames*. On suppose que la plaque considérée plus haut est divisée en bandes disposées comme sur les figures 118*b*, *c*, *d*. On néglige la courbure initiale et le frottement entre les bandes dans une première approximation et l'on considère l'équation (123) comme suffisamment précise (¹).

On utilisera avantageusement la méthode du moment des aires (voir § 34) pour le calcul de la flèche des poutres de section variable. Dans ce genre d'application, il suffira de se souvenir que la courbure de la ligne élastique d'une section quelconque est égale au rapport M/EI_z (éq. 56, p. 92). Donc, un accroissement de la rigidité à la flexion, en une section donnée, a même effet sur la flèche qu'une diminution proportionnelle du moment fléchissant dans cette section. Par conséquent, le problème de la flèche des poutres de section variable se ramène à celui des poutres de section constante en utilisant le *diagramme du moment fléchissant rectifié*. On obtient le diagramme du moment rectifié en multipliant les ordonnées du diagramme réel par le rapport I_0/I, où I représente le moment d'inertie d'une section quelconque et I_0 un moment d'inertie constant. Ceci réduit

(¹) Cette résolution fut obtenue par E. Phillips, *Ann. mines*, vol. 1, pp. 195-336, 1852. Voir aussi Todhunter et Pearson, *History of the Theory of Elasticity*, vol. 2, p. 330, 1893 ; et A. Castigliano. *Theorie der Biegungs- und Torsions-Federn*, Vienne, 1888. L'influence du frottement entre les lames fut étudiée par G. Marié, *Ann. mines*, vol. 7-9, 1905-1906. D. Landau et P. H. Parr étudièrent la répartition de la charge entre chaque lame du ressort, *J. Franklin Inst.*, vol. 185-187. Une bibliographie complète sur les ressorts mécaniques a été publiée par *Am. Soc. Mech. Engrs.*, New York, 1927. Voir aussi l'ouvrage de S. Gross et E. Lehr. *Die Federn*, V.D.I. Verlag, 1938. Une étude très complète sur les différents types de ressorts mécaniques est développée dans l'ouvrage de A. M. Wahl, *Mechanical Springs*, Cleveland, 1944.

la flèche de la barre de section variable à la flèche d'une barre de section constante dont le moment d'inertie est I_0.

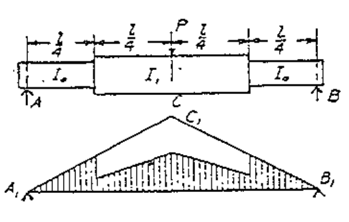


FIG. 189.

Par exemple, on ramène le problème de la flèche d'un arbre circulaire (fig. 189) ayant deux sections de diamètres différents dont les moments d'inertie sont I_0, I_1 et sollicitée par une charge P, au problème d'un arbre circulaire à moment d'inertie constant I_0. On considère, dans ce but, la poutre conjuguée A_1B_1, on utilise la sollicitation représentée par l'aire hachurée au lieu de la charge triangulaire $A_1B_1C_1$ représentant le diagramme du moment fléchissant réel. On obtient cette aire en réduisant les ordonnées du diagramme, le long du tronçon central de l'arbre, dans le rapport I_0/I_1. On détermine ensuite les flèches et les pentes comme pour les barres prismatiques, les valeurs de la flèche et de la pente, en toute section de la poutre, sont égales au moment fléchissant et à l'effort tranchant de la poutre conjuguée divisés par EI_0. On remarquera que dans le cas de la figure 189 il se produit une brusque variation du diamètre de l'arbre, à la distance $l/4$ des appuis, produisant des contraintes locales en ces points. Celles-ci n'auront qu'un effet secondaire sur la flèche de l'arbre si la différence entre les diamètres des deux tronçons est petite par rapport à leurs longueurs.

La méthode employée ci-dessus pour un arbre de section variable s'applique aussi aux poutres I composées et aux poutres en tôle de section variable. Soit le cas de la figure 190 représentant une poutre en tôle en appui sur ses extrémités et uniformément chargée. Le moment fléchissant décroît du milieu aux extrémités de la poutre, et l'on réduit le poids de celle-ci en diminuant le nombre de plaques sur les ailes, comme indiqué

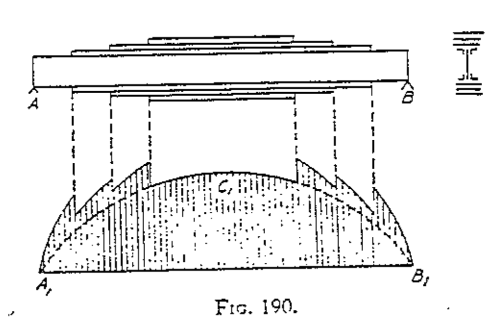


FIG. 190.

schématiquement sur la figure. On calcule la flèche de cette poutre à partir du moment d'inertie de la section médiane. La charge sur la poutre conjuguée n'est plus celle que limite la parabole en tirets sur la figure, mais plutôt celle que représente l'aire hachurée de la figure 190 ; chaque diminution de section est compensée par un accroissement des ordonnées du diagramme du moment dans le rapport I_{moyen}/I.

Problèmes

1. Une plaque d'acier ayant la forme indiquée sur la figure 191 est encastrée à une extrémité et sollicitée par une charge P à l'autre. Déterminer la flèche à l'extrémité, sachant que la longueur de la plaque est $2l$, sa largeur est a et h son épaisseur.

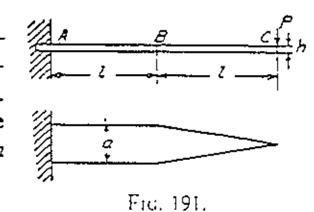


FIG. 191.

Solution. La flèche se décompose en trois parties :

$$\delta_1 = \frac{Pl^3}{3\,EI_z} + \frac{Pl^3}{2\,EI_z} = \text{flèche en } B,$$

$$\delta_2 = \frac{3\,Pl^3}{2\,EI_z} = \text{flèche en } C \text{ due à la pente en } B,$$

$$\delta_3 = \frac{Pl^3}{2\,EI_z} = \text{flèche due à la flexion du tronçon } BC \text{ de la plaque}.$$

La flèche totale est $\delta = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3$.

2. Résoudre le problème précédent en supposant que $l = 25$ cm, $a = 7{,}5$ cm, $P = 500$ daN et $\sigma_{max} = 5\,000$ bars.

3. Déterminer la largeur d d'une lame de ressort (fig. 188) et sa flèche, lorsque $P = 30$ kN, $h = 1{,}25$ cm, $l = 60$ cm, $\sigma_w = 5\,000$ bars et le nombre de lames est $n = 10$.

Solution. Considérons les lames du ressort découpées dans une plaque triangulaire (fig. 188*b*), la contrainte maximum est

$$\sigma_{max} = \frac{6\,Pl}{ndh^2},$$

d'où

$$d = \frac{6\,Pl}{n\sigma_w h^2} = \frac{6 \times 3\,000 \times 60}{10 \times 5\,000 \times 1{,}56} = 13{,}85 \text{ cm}.$$

On détermine la flèche à l'aide de l'équation (123),

$$\delta = \frac{5\,000 \times 60^2}{\frac{1}{2} \times 21 \times 10^2} = 17{,}14 \text{ cm}.$$

4. Comparer la flèche au milieu et la pente aux extrémités de l'arbre de la figure 189 avec la flèche et la pente d'un arbre de même longueur mais de section constante et dont le moment d'inertie est égal à I_0. Prendre $I_1/I_0 = 2$.

Solution. En raison de la grande rigidité à la flexion au milieu, les pentes aux extrémités de l'arbre de la figure 189 sont inférieures à celles aux extrémités de l'arbre cylindrique dans le rapport de l'aire hachurée à l'aire totale du triangle $A_1C_1B_1$. L'aire totale représente la sollicitation dans le cas de l'arbre cylindrique. Pour les valeurs données ce rapport est $\frac{5}{8}$: 1.

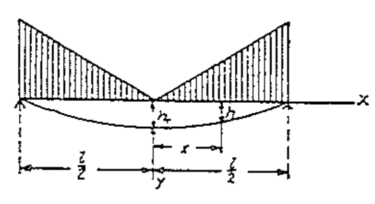


Fig. 192.

Les flèches au milieu pour les deux types d'arbres sont dans le rapport du moment fléchissant, représenté par l'aire hachurée, au moment produit par l'aire du triangle $A_1C_1B_1$. On trouvera $\frac{9}{16}$: 1.

5. Une poutre en appui sur ses extrémités est sollicitée de la manière indiquée sur la figure 192. Quelle peut être la variation de la hauteur h de la poutre pour qu'elle soit d'égale résistance, sachant que la largeur b de la section rectangulaire reste constante le long de la poutre entière ?

Réponse. $h^2 = h_0^2\left(1 - 8\dfrac{x^3}{l^3}\right)$.

6. Déterminer la flèche d'une plaque d'acier de 1,25 cm d'épaisseur (fig. 193*a* et 193*b*) soumise à l'action de la charge $P = 9$ daN appliquée en son milieu.

Solution. Réduisons le problème à celui de la flèche d'une plaque de largeur constante = 10 cm, le diagramme du moment transformé est, dans ce cas, représenté par le trapèze *adeb* (fig. 193*c*), nous obtenons

$$\delta = \frac{11}{8} \cdot \frac{Pl^3}{48\,EI_z},$$

ou I_z est le moment d'inertie à mi-portée. On calcule alors aisément la valeur absolue de la flèche.

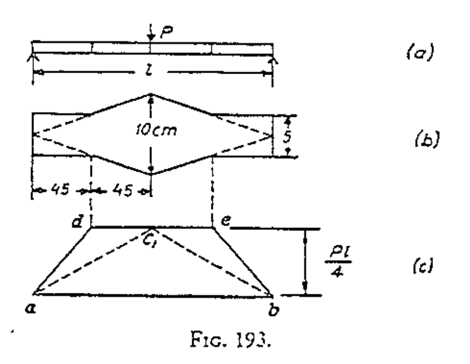


Fig. 193.

7. Déterminer la flèche maximum d'une lame de ressort (fig. 188*a*), sachant que $l = 90$ cm, $h = 1{,}25$ cm, $E = 21 \times 10^5$ bars, $\sigma_W = 4\,200$ bars.

Réponse. $\delta = 13$ cm.

8. Une poutre rectangulaire en appui simple supporte une charge P mobile sur la portée. Comment doit varier la hauteur h de la poutre pour qu'elle soit d'égale résistance, sachant que la largeur b de sa section rectangulaire reste constante sur toute la poutre ?

Solution. Pour toute position donnée de la charge le moment maximum se développe au droit de celle-ci. Soit x la distance de la charge au milieu de la portée, le moment fléchissant au droit de celle-ci est

$$M = \frac{P\left(\frac{l}{2} - x\right)\left(\frac{l}{2} + x\right)}{l}$$

On tire la hauteur h de la poutre, au droit de la charge, de l'équation :

$$\sigma_W = \frac{6\,M}{bh^2},$$

d'où

$$h^2 = \frac{6\,M}{b\sigma_W} = \frac{6\,P}{lb\sigma_W}\left(\frac{l^2}{4} - x^2\right)$$

et

$$\frac{h^2}{6\,Pl/4\,b\sigma_W} + \frac{x^2}{l^2/4} = 1\,.$$

On remarque que dans ce cas la hauteur de la poutre varie suivant une loi elliptique, les demi-axes de l'ellipse étant

$$l/2 \quad \text{et} \quad \sqrt{6\,Pl/4\,b\sigma_W}\,.$$

9. Déterminer les moments fléchissants aux extrémités encastrées de la poutre AB chargée au centre (fig. 194). Prendre $I_1/I_0 = 2$.

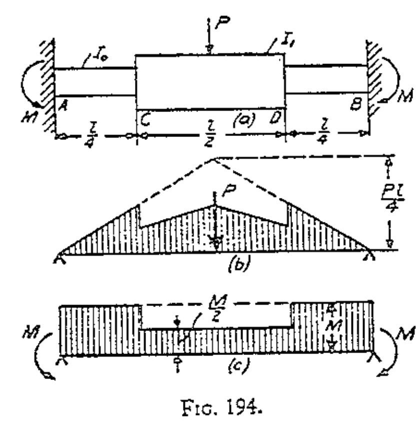


Fig. 194.

Solution. Une des résolutions s'obtient en combinant les deux cas simples des figures (*b*) et (*c*). Il est évident que la condition d'encastrement des extrémités sera satisfaite si les pentes y sont nulles, c'est-à-dire, si les réactions dues à la charge fictive (voir p. 150), représentée par les aires hachurées en (*b*) et (*c*), sont égales. Donc, l'équation permettant le calcul de la valeur absolue de M est

$$\frac{Pl}{4}\frac{l}{2} - \frac{3}{8}\frac{Pl}{4}\frac{l}{2} = Ml - \frac{Ml}{4},$$

d'où

$$M = 5\,Pl/48\,.$$

10. Résoudre le problème ci-dessus en supposant que deux charges égales P sont appliquées en C et D.

Réponse. $M = Pl/6$.

47. Poutres symétriques composées de deux matériaux différents

Dans certains cas, on utilise des poutres constituées de deux ou plusieurs matériaux différents. La figure 195*a* représente un cas simple de poutre en bois renforcée par une plaque d'acier boulonnée sur la face inférieure. Si l'on suppose qu'il n'y a pas de glissement entre l'acier et le bois durant la flexion, on pourra encore utiliser la théorie des poutres simples. D'après celle-ci les allongements et les contractions des fibres longitudinales sont proportionnels à la distance qui les sépare de l'axe neutre. Puisque le module d'élasticité du bois E_w est plus petit que celui de l'acier E_s, la partie en bois équivaut, du point de vue de la flexion, à une âme en acier beaucoup plus étroite (voir fig. 195*b*). Si l'on veut que le moment résistant des efforts internes reste inchangé pour une courbure donnée, c'est-à-dire pour un allongement et une contraction donnés, l'épaisseur b_1 de l'âme doit être telle que

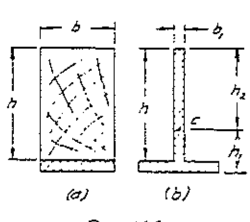


Fig. 195.

$$b_1 = \frac{bE_w}{E_s}. \qquad (a)$$

Ainsi, le problème se réduit à celui de la flexion d'un profilé T en acier, appelé *section transformée*, dont la résolution s'opère sur la base de la théorie précédente.

Considérons, par exemple, une poutre de 3 m de long sollicitée en

son milieu par une charge de 450 daN. Les dimensions de la section de la partie en bois sont $b = 10$ cm, $h = 15$ cm ; la face convexe est renforcée par une plaque d'acier de 2,5 cm de largeur et de 1,25 cm d'épaisseur. Supposons que $E_w/E_s = 1/120$, et utilisons l'équation (*a*), la section transformée aura une âme de 15×5 cm et un plat de 2,5×1,25 cm. Les distances des fibres extrêmes à l'axe neutre (fig. 195*b*) sont : $h_1 = 6{,}36$ cm et $h_2 = 9{,}89$ cm. Le moment d'inertie de la section équivalente, par rapport à l'axe neutre, a pour valeur $I_z = 287$ cm⁴. Les contraintes dans les fibres extrêmes de la section transformée sont donc (voir éq. 61, p. 93) :

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}h_1}{I_z} = \frac{33\,750 \times 6{,}36}{287} = 748 \text{ bars}\,,$$

$$\sigma_{min} = -\frac{M_{max}h_2}{I_z} = -\frac{33\,750 \times 9{,}89}{287} = 1\,163 \text{ bars}\,.$$

Pour obtenir la contrainte de compression maximum dans le bois de la poutre réelle, on multiplie la contrainte σ_{min}, obtenue plus haut pour l'acier, par $E_w/E_s = 1/20$. Dans ce cas, la contrainte maximum de traction est la même pour la poutre réelle et sa transformée.

Comme autre exemple de flexion d'une poutre composée, considérons le cas d'une bande bimétallique en acier au nickel et en métal monel (fig. 196). La flexion de cette bande, soumise aux forces extérieures, s'étudie de la même manière que précédemment à condition que l'on connaisse le rapport E_m/E_s dans lequel E_m et E_s désignent respectivement les modules d'élasticité du métal monel et de l'acier. Considérons alors la flexion d'une telle bande

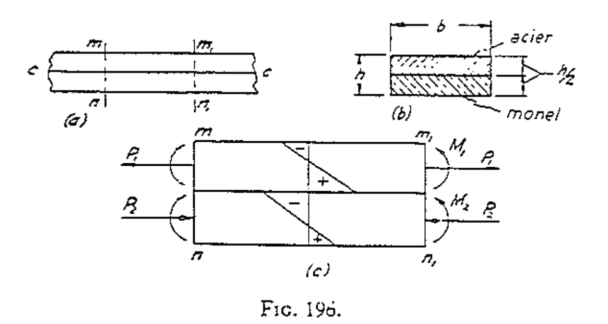


Fig. 196.

due à une variation de température. Le coefficient de dilatation thermique du monel est supérieur à celui de l'acier et, lorsque la température augmente, la flexion est concave du côté de la bande d'acier. Ce phénomène de flexion des bandes bilames, sous l'effet de variations thermiques, est utilisé dans divers

régulateurs automatiques de température comme les thermostats ([2]). Soit $h/2$ l'épaisseur et b la largeur de chaque bande métallique, t l'accroissement de température, r le rayon de courbure, α_s et α_m les coefficients de dilatation thermique respectifs de l'acier et du monel, $E_s I_s$ la rigidité à la flexion de l'acier et $E_m I_m$ celle du monel. Lorsque la température s'élève la bande de monel, dont le coefficient de dilatation est plus grand, est soumise simultanément à la flexion et à la compression, tandis que l'acier subit la flexion et la traction. Considérons un élément du bi-lame pris entre deux sections voisines mn et $m_1 n_1$ (fig. 196*c*), les forces internes sur la section de l'acier se réduisent à une traction P_1 et à un couple M_1. De la même manière, les forces internes du monel se réduisent à une compression P_2 et à un couple M_2. Les forces internes sur une section quelconque de la poutre sont en équilibre. Donc

$$P_1 = P_2 = P$$

et

$$\frac{Ph}{2} = M_1 + M_2 . \qquad (b)$$

Substituons

$$M_1 = \frac{E_s I_s}{r}, \qquad M_2 = \frac{E_m I_m}{r},$$

dans l'équation (*b*), nous obtenons

$$\frac{Ph}{2} = \frac{E_s I_s}{r} + \frac{E_m I_m}{r} . \qquad (c)$$

On établit une autre relation entre P et r en écrivant qu'à la surface de contact, *c*-*c*, l'allongement unitaire du monel est identique à celui de l'acier. Donc

$$\alpha_s t + \frac{2P_1}{E_s hb} + \frac{h}{4r} = \alpha_m t - \frac{2P_2}{E_m hb} - \frac{h}{4r}$$

ou

$$\frac{2P}{hb}\left(\frac{1}{E_s} + \frac{1}{E_m}\right) = (\alpha_m - \alpha_s)t - \frac{h}{2r} . \qquad (d)$$

D'après les équations (*c*) et (*d*) nous obtenons

$$\frac{4}{bh^2 r}(E_s I_s + E_m I_m)\left(\frac{1}{E_s} + \frac{1}{E_m}\right) = (\alpha_m - \alpha_s)t - \frac{h}{2r} . \qquad (e)$$

Substituons dans cette équation

$$I_s = I_m = \frac{bh^3}{96} \qquad \text{et} \qquad E_s = 1{,}15\,E_m ,$$

on obtient la relation approchée suivante :

$$\frac{1}{r} = \frac{3}{2}\frac{(\alpha_m - \alpha_s)t}{h} . \qquad (f)$$

([2]) Voir la note de l'auteur dans *J. Opt. Soc. Amer.*, vol. 11, p. 23.

L'équation (*c*) donne alors

$$P = \frac{3}{h^2}(\alpha_m - \alpha_s)t(E_s I_s + E_m I_m) = \frac{bh}{32}(\alpha_m - \alpha_s)t(E_s + E_m) \qquad (g)$$

et

$$M_1 = \frac{3}{2}\frac{(\alpha_m - \alpha_s)t}{h}E_s I_s , \qquad M_2 = \frac{3}{2}\frac{(\alpha_m - \alpha_s)t}{h}E_m I_m . \qquad (h)$$

On détermine P, M_1 et M_2 à l'aide des équations (*g*) et (*h*). On obtient la contrainte maximum dans l'acier en ajoutant à la contrainte de traction, due à la force P, la contrainte de traction résultant de la courbure $1/r$:

$$\sigma_{max} = \frac{2P}{bh} + \frac{h}{4}\frac{E_s}{r} = \frac{4}{bh^2 r}\left(E_s I_s + E_m I_m + \frac{bh^2}{16}E_s\right).$$

Supposons, par exemple, que les deux métaux aient même module E, nous obtenons

$$\sigma_{max} = \frac{hE}{3r},$$

ou, en utilisant l'équation (*f*) ([3]),

$$\sigma_{max} = \tfrac{1}{2}Et(\alpha_m - \alpha_s) .$$

Pour $E = 18{,}9 \times 10^5$ bars, $t = 200$ °C et $\alpha_m - \alpha_s = 4 \times 10^{-6}$ nous trouvons

$$\sigma_{max} = 189 \text{ bars} .$$

La figure 196*c* indique la répartition des contraintes dues à l'échauffement.

Problèmes

1. Trouver le moment fléchissant de sécurité de la poutre en bois renforcée par une plaque d'acier (fig. 195), sachant que $b = 15$ cm, $h = 20$ cm et l'épaisseur de la plaque d'acier est de 1,25 cm. On suppose que $E_w = 1{,}05 \times 10^5$ bars, $E_s = 21 \times 10^5$ bars, $\sigma_W = 80$ bars pour le bois et $\sigma_W = 1\,100$ bars pour l'acier.

2. On suppose que la poutre en bois du problème précédent est renforcée sur sa face supérieure par une plaque d'acier de 5 cm de largeur et 2,5 cm d'épaisseur ; sur sa face inférieure elle est renforcée par une plaque d'acier de 15 cm de largeur et 1,25 cm d'épaisseur. Calculer le moment fléchissant de sécurité sachant que E et σ_W sont les mêmes que dans le problème 1.

Réponse. 33 100 m · N.

3. Un bilame a une longueur $l = 2{,}5$ cm. Calculer la flèche au milieu produite par une élévation de température de 200 °C, sachant que $E_s = 1{,}15\,E_m$ et $\alpha_m - \alpha_s = 4 \times 10^{-5}$.

([3]) Cette équation est également valable pour $E_s = E_m$.

48. Poutres en béton armé

C'est un fait bien connu que la résistance du béton est plus grande en compression qu'en traction. Par suite, une grande poutre rectangulaire en béton périt sous l'action de tractions sur sa face convexe. On renforce considérablement la poutre par adjonction de barres d'acier placées dans le voisinage de la face convexe (voir fig. 17). Comme le béton adhère fortement à l'acier, les barres ne peuvent glisser dans le béton pendant la flexion et la méthode du paragraphe précédent s'utilise ici aussi pour le calcul de contraintes de flexion. En pratique, on choisit la section des barres d'acier de manière que la résistance en traction du béton sur la face convexe soit dépassée avant que la limite élastique de l'acier soit atteinte; ainsi, pour des charges supérieures, l'acier supporte pratiquement seul la totalité de la traction. La pratique s'est donc établie de calculer les contraintes de flexion dans les poutres en béton armé en supposant que l'acier supporte la totalité de la traction et le béton la totalité de la compression. Remplaçons les tractions dans les barres d'acier par leur résultante R, la répartition des forces internes, sur une section quelconque mp, s'effectue conformément à la figure 197*b*. Supposons, comme précédemment, que les sections restent planes durant la flexion et soit kd la distance séparant l'axe neutre nn de la face supérieure (⁴), le raccourcissement longitudinal unitaire maximum ε_c du béton et l'allongement unitaire ε_s des axes des barres d'acier sont donnés par les expressions :

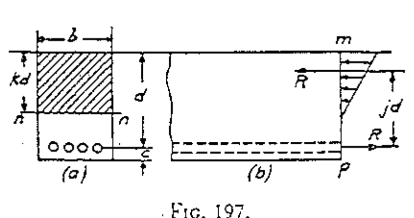


Fig. 197.

$$\varepsilon_c = -\frac{kd}{r}, \qquad \varepsilon_s = \frac{(1-k)d}{r}. \tag{a}$$

Le béton n'obéit pas à la loi de Hooke et le diagramme d'essai de compression de ce matériau présente une allure analogue au diagramme de la figure 4*b* donné pour la fonte. Lorsque la contrainte de compression augmente, la pente de la tangente au diagramme diminue, c'est-à-dire que le module du béton décroît lorsque s'élève la contrainte. Pour le calcul des contraintes dans les poutres en béton armé, on admet généralement que la loi de Hooke est valable pour le béton et l'on compense

(⁴) k est un facteur numérique inférieur à l'unité.

la variation du module en prenant pour celui-ci une valeur inférieure à celle qui résulterait d'essais de compression dans le domaine des faibles contraintes. La réglementation relative au béton armé admet généralement que $E_s/E_c = 15$. Ainsi, d'après les équations (*a*), la contrainte de compression maximum dans le béton et la contrainte de traction maximum dans l'acier (⁵) sont respectivement :

$$\sigma_c = -\frac{kd}{r}E_c, \qquad \sigma_s = \frac{(1-k)d}{r}E_s. \tag{b}$$

On détermine alors la position de l'axe neutre par la condition que les efforts normaux sur la section mp se réduisent à un couple égal au moment fléchissant en cette section. La somme des efforts de compression dans le béton est égale à l'effort de traction R dans les barres d'acier, c'est-à-dire,

$$-\frac{bkd\sigma_c}{2} = \sigma_s A_s, \tag{c}$$

où A_s est l'aire de la section totale de l'acier. Utilisons la notation $A_s/bd = p$ et $E_s/E_c = n$, nous tirons des équations (*c*) et (*b*)

$$k^2 = 2(1-k)pn, \tag{d}$$

d'où

$$k = \sqrt{(pn)^2 + 2pn} - pn. \tag{124}$$

Après avoir déterminé la position de l'axe neutre à l'aide de (124), le rapport entre contrainte maximum dans le béton et contrainte dans l'acier devient, d'après (*b*),

$$-\frac{\sigma_c}{\sigma_s} = \frac{k}{(1-k)n}. \tag{125}$$

La distance jd, séparant les résultantes R des efforts de compression et de traction s'exerçant sur la section de la poutre (fig. 197*b*), est égale à (⁶)

$$jd = \frac{2}{3}kd + (1-k)d = \left(1 - \frac{k}{3}\right)d, \tag{126}$$

(⁵) Les dimensions des sections des barres sont généralement faibles et l'on prend la contrainte de traction moyenne au lieu de la contrainte maximum.

(⁶) j est un facteur numérique inférieur à un.

et le moment des efforts internes équilibrant le moment fléchissant M est

$$jdR = jdA_s\sigma_s = -\frac{jkbd^2}{2}\sigma_c = M\,,$$

d'où

$$\sigma_s = \frac{M}{A_s jd}, \tag{127}$$

$$\sigma_c = -\frac{2M}{jkbd^2}. \tag{128}$$

On calcule aisément, au moyen des équations (124) à (128), les contraintes de flexion dans les poutres en béton armé.

Problèmes

1. Sachant que $E_s/E_c = 15$ et $A_s = 0{,}008bd$, déterminer la distance de l'axe neutre à la face supérieure de la poutre (fig. 197).

Réponse. $kd = 0{,}384d$.

2. Déterminer le rapport $p = A_s/bd$, sachant que la contrainte de traction maximum dans l'acier est 800 bars, la contrainte de compression maximum dans le béton est 43 bars et $E_s/E_c = n = 15$.

Solution. D'après (125), $k = 0{,}446$. Par suite, d'après (d),

$$p = \frac{k^2}{2(1-k)n} = 0{,}012\,.$$

3. Déterminer le rapport p si la contrainte de compression maximum dans le béton est le 1/20 de la contrainte de traction dans l'acier.

Réponse. $p = 0{,}010\,7$.

4. Sachant que $n = 15$ et que la contrainte d'utilisation du béton est 45 bars, déterminer la charge de sécurité au milieu d'une poutre en béton armé. La portée de la poutre est de 3 m et elle repose sur deux appuis simples, en outre $b = 25$ cm, $d = 30$ cm, $A_s = 7{,}30$ cm².

Réponse. $P = 2\,410$ daN.

5. Calculer le moment fléchissant maximum que peut supporter, en toute sécurité, une poutre en béton, sachant que $b = 20$ cm, $d = 30$ cm, $A_s = 12{,}50$ cm², $E_s/E_c = 12$ et la contrainte d'utilisation de l'acier est 10,5 hectobars pour l'acier et 56 bars pour le béton.

Réponse. $M = 21\,000$ m · N.

6. Déterminer la valeur de k pour laquelle les contraintes maximums admissibles sont atteintes simultanément dans le béton et dans l'acier.

Solution. Soit σ_c et σ_s les contraintes admissibles dans le béton et l'acier. Formons le rapport de celles-ci à l'aide des équations (b) en ne considérant que la valeur absolue de ce rapport, nous obtenons

$$\frac{\sigma_c}{\sigma_s} = \frac{kE_c}{(1-k)E_s},$$

d'où

$$k = \frac{\sigma_c}{\sigma_c + \sigma_s\dfrac{E_c}{E_s}}.$$

Si cette condition est satisfaire on dit que la poutre est à *armatures compensées*. Connaissant k et utilisant l'équation (126), on obtient la hauteur au moyen de (128) et l'aire A_s par (127).

7. Déterminer le taux de section $p = A_s/bd$ de l'acier, sachant que $\sigma_s = 8$ hectobars, $\sigma_c = 43$ bars et $n = E_s/E_c = 15$.

Solution. D'après la formule du problème 6 nous obtenons

$$k = 0{,}446\,.$$

Par suite, en remplaçant dans (d), il vient

$$p = 0{,}012\,.$$

8. Calculer la poutre de 25 cm de largeur capable de supporter dans les conditions de sécurité un moment fléchissant de 30 000 m · N. On suppose que $\sigma_c = 50$ bars, $\sigma_s = 8$ hectobars et $E_s/E_c = 12$. Trouver la hauteur d et l'aire A_s de l'acier. On supposera les armatures compensées comme au problème 6.

49. Contraintes de cisaillement dans les poutres en béton armé

Utilisons la même méthode qu'au paragraphe 26 et considérons un élément mnm_1n_1 pris entre deux sections très voisines mp et m_1p_1 (fig. 198), on conclut que la contrainte de cisaillement maximum τ_{yz} s'exerce sur la surface neutre nn_1. Soit $\mathrm{d}R$ la différence entre les efforts de compression sur le béton dans les sections mp et m_1p_1, la contrainte de cisaillement τ_{yz} sur la surface neutre est

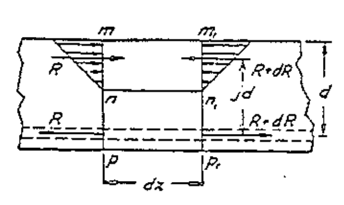


FIG. 198.

$$(\tau_{yz})_{\max}\, b\mathrm{d}x = \mathrm{d}R\,,$$

d'où

$$(\tau_{yz})_{\max} = \frac{1}{b}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x}. \qquad (a)$$

Puisque le moment fléchissant est

$$M = Rjd,$$

l'équation (a) devient

$$(\tau_{yz})_{\max} = \frac{1}{bjd}\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} = \frac{V}{bjd}, \qquad (b)$$

V désigne l'effort tranchant dans la section considérée. Utilisons (126), l'équation ci-dessus des contraintes de cisaillement devient

$$(\tau_{yz})_{\max} = \frac{3V}{bd(3-k)}. \qquad (129)$$

Dans les calculs pratiques, il faut tenir compte non seulement des contraintes de cisaillement sur la surface neutre mais aussi des contraintes de cisaillement sur la surface de contact entre l'acier et le béton (contraintes d'adhérence). Considérons à nouveaux deux sections très voisines (fig. 198), la différence entre les efforts de traction dans les barres d'acier en ces deux sections est

$$\mathrm{d}R = \frac{V\mathrm{d}x}{jd}.$$

Cette différence est équilibrée par les contraintes d'adhérence répartie sur la surface des barres. Soit A la surface latérale totale de toutes les barres d'acier par unité de longueur de poutre, la contrainte d'adhérence sur la surface des barres est

$$\frac{\mathrm{d}R}{A\mathrm{d}x} = \frac{V}{Ajd} = \frac{3V}{A(3-k)d}. \qquad (130)$$

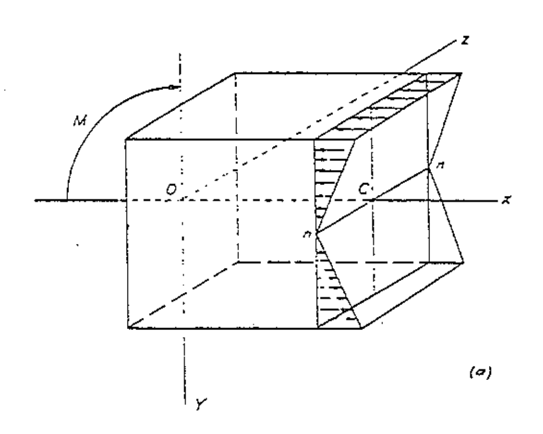
Cette contrainte devient supérieure à celle s'exerçant sur l'axe neutre (éq. 129) lorsque A est inférieur à b. Pour augmenter A, tout en conservant constante la section de l'acier, il suffit d'augmenter le nombre de barres et de réduire leur diamètre.

8

FLEXION DES POUTRES DANS UN PLAN QUI N'EST PAS DE SYMÉTRIE

50. Flexion pure dans un plan qui n'est pas de symétrie

Si une poutre possède un plan de symétrie, le plan xy par exemple (fig. 199a), et si des couples s'exerçant dans ce plan sont appliqués aux extrémités, alors la poutre est fléchie dans le même plan et l'axe neutre nn, en chaque section transversale (fig. 199a), passe par le centre de gravité C et est perpendiculaire au plan où s'exercent les couples. Par raison de symétrie on conclut que les contraintes correspondant à cette



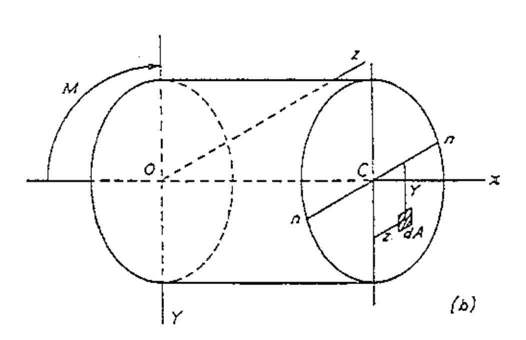


Fig. 199.

direction de l'axe neutre donnent un couple résultant dans le plan xy, et par une sélection appropriée de la valeur de ces contraintes (voir éq. 56, p. 92) ce couple équilibre le couple extérieur M.

Considérons alors le cas où le plan xy des couples fléchissants (voir fig. 199) n'est pas un plan de symétrie. Recherchons alors sous quelle condition l'axe neutre est perpendiculaire à ce plan. Supposons que l'axe nn est perpendiculaire au plan xy et opérons comme au paragraphe 23, nous constatons que l'effort s'exerçant sur un élément infinitésimal $\mathrm{d}A$ de la section est normal à la section et a pour valeur $Ey\mathrm{d}A/r$. Les équations d'équilibre du tronçon de poutre de la figure 199 sont (¹) :

$$\frac{E}{r}\int_A y\mathrm{d}A = 0\,, \qquad \frac{E}{r}\int_A y^2\mathrm{d}A = M\,, \qquad \frac{E}{r}\int_A yz\mathrm{d}A = 0\,. \qquad (a)$$

La première de ces équations signifie que l'axe neutre passe par le centre de gravité de la section. La seconde définit la courbure $1/r$ de la ligne élastique et la troisième précise que les axes y et z sont les axes principaux d'inertie de la section (voir appendices A, § IV, p. 403) et que les plans xy et xz sont les *plans principaux* de la poutre. Ceci prouve que

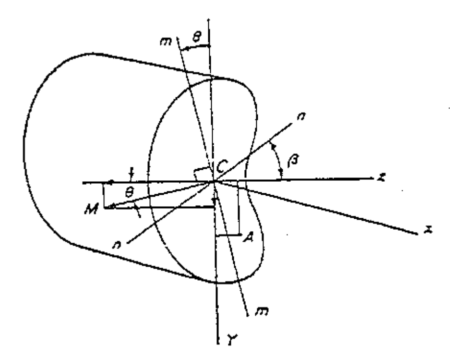


FIG. 200.

dans le cas général de flexion pure le plan de flexion ne coïncide avec le plan où s'exercent les couples que si ce dernier est l'un des plans principaux de la barre.

Si le plan où s'exercent les couples ne coupe pas l'un des axes principaux de la section de la barre, alors la troisième équation d'équilibre (a) n'est pas satisfaite. Donc l'axe neutre n'est pas perpendiculaire au plan des couples de flexion et se détermine de la façon suivante : on suppose qu'un couple M s'exerce dans un plan axial de la barre, lequel coupe la section suivant mm faisant un angle θ avec l'axe principal y (fig. 200). Le vecteur M représentant le moment du couple se décompose suivant les composantes indiquées sur la figure. Puisque chaque composante du couple s'exerce dans l'un des plans principaux de la poutre, on obtient les contraintes correspondantes en appliquant les formules usuelles des poutres. La contrainte totale en un point A de la section est

$$\sigma = \frac{My\cos\theta}{I_z} + \frac{Mz\sin\theta}{I_y}\,. \qquad (b)$$

Egalons cette contrainte à zéro, nous obtenons l'équation de l'axe neutre :

$$\frac{y\cos\theta}{I_z} + \frac{z\sin\theta}{I_y} = 0\,, \qquad (c)$$

et la tangente de l'angle β définissant la direction de l'axe neutre nn est

$$\mathrm{tg}\,\beta = -\frac{y}{z} = \frac{I_z}{I_y}\,\mathrm{tg}\,\theta\,. \qquad (d)$$

On constate que l'angle β est en général différent de θ, et l'axe neutre n'est pas perpendiculaire au plan axial mm dans lequel agissent les couples de flexion. Les deux angles ne sont égaux que si $\theta = 0$ ou $I_z = I_y$. Dans le premier de ces deux cas les couples de flexion s'exercent dans le plan principal xy et l'axe neutre coïncide avec l'axe principal z. Dans le second cas les deux moments d'inertie principaux de la section sont égaux. Dans ce cas l'ellipse d'inertie de la section (voir appendice A, § V, p. 405) se transforme en un cercle et une paire quelconque d'axes au centre perpendiculaires représente alors les axes principaux ; l'axe neutre est donc toujours perpendiculaire au plan des couples de flexion.

Dans l'étude précédente nous avons décomposé les couples en deux composantes s'exerçant dans les plans principaux de la poutre et nous avons calculé les contraintes produites par chacune de ces composantes. Toutefois, il est préférable d'opérer directement avec les couples de flexion donnés et d'obtenir la formule des contraintes de flexion produites par ces couples. Considérons, afin d'établir cette formule, la flexion d'une poutre soumise aux couples M_z

(¹) Les trois autres équations sont toujours satisfaites puisque les moments de tous les efforts par rapport à l'axe x et leurs projections sur les axes y et z disparaissent.

et M_y s'exerçant suivant deux plans axiaux perpendiculaires xy et xz, pris arbitrairement (fig. 201). On suppose que ces couples sont tels que la flexion se produit dans le plan xy, si bien que l'axe neutre dans chaque section est

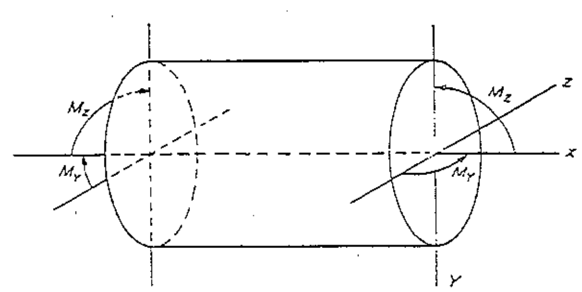


Fig. 201.

parallèle à l'axe z. Soit r_y le rayon de courbure correspondant, les contraintes de flexion sont $\sigma_z = E_y/r_y$ et l'on obtient les couples de flexion suivants :

$$M_z = \int_A y\sigma_x dA = \frac{EI_z}{r_y}, \qquad M_y = -\int_A z\sigma_x dA = -\frac{EI_{yz}}{r_y}. \tag{e}$$

De même, si les couples sont tels que la flexion se produit dans le plan xz, alors $\sigma_z = -Ez/r_z$, et nous avons :

$$M_y = \frac{EI_y}{r_z}, \qquad M_z = -\frac{EI_{yz}}{r_z}. \tag{f}$$

Dans le cas général, lorsque les flèches apparaissent dans les deux plans les relations entre moments fléchissants et courbures s'obtiennent en combinant les équations (*e*) et (*f*), nous écrivons

$$M_y = \frac{EI_y}{r_z} - \frac{EI_{yz}}{r_y}, \qquad M_z = \frac{EI_z}{r_y} - \frac{EI_{yz}}{r_z}. \tag{g}$$

Lorsque les couples ne s'exercent que dans le plan xy, alors $M_y = 0$ et l'on obtient :

$$\frac{EI_y}{r_z} - \frac{EI_{yz}}{r_y} = 0, \quad \frac{1}{r_z} = \frac{1}{r_y}\cdot\frac{I_{yz}}{I_y}.$$

Substituons dans la seconde des équations (*g*) nous trouvons :

$$M_z = \frac{1}{r_y}\cdot\frac{E(I_zI_y - I_{yz}^2)}{I_y},$$

$$\frac{1}{r_y} = \frac{M_zI_y}{E(I_zI_y - I_{yz}^2)}, \qquad \frac{1}{r_z} = \frac{M_zI_{yz}}{E(I_zI_y - I_{yz}^2)}. \tag{131}$$

Les contraintes de flexion produites par le couple M_z sont alors

$$\sigma_x = \frac{Ey}{r_y} - \frac{Ez}{r_z} = \frac{M_z}{I_zI_y - I_{yz}^2}(I_yy - I_{yz}z). \tag{132}$$

De même, lorsque M_z disparaît, nous avons

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_zI_y - I_{yz}^2}(I_{yz}y - I_zz). \tag{133}$$

Les équations (132) et (133) s'utilisent spécialement pour les poutres à âme et ailes parallèles aux axes y et z.

Problèmes

1. Une poutre cantilever de section rectangulaire (fig. 202) est fléchie par un couple M s'exerçant dans le plan axial mm. Quelle courbe décrira l'extrémité de la poutre lorsque l'angle θ, définissant le plan du moment fléchissant, varie de zéro à 2π ?

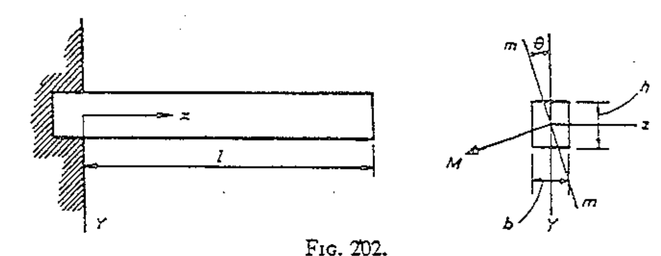


Fig. 202.

Solution. Décomposons le moment fléchissant en deux composantes $M\cos\theta$ et $M\sin\theta$ situées respectivement dans les plans principaux xy et xz, nous obtenons les deux composantes u et v de la flèche de l'extrémité de la cantilever suivant les directions y et z :

$$u = -\frac{Ml^2\cos\theta}{2EI_z}, \qquad v = -\frac{Ml^2\sin\theta}{2EI_y},$$

d'où

$$\frac{u^2}{(Ml^2/2EI_z)^2} + \frac{v^2}{(Ml^2/2EI_y)^2} = 1.$$

L'extrémité de la cantilever décrit une ellipse dont les demi-axes sont $Ml^2/2EI_z$ et $Ml^2/2EI_y$.

2. Trouver, dans le problème précédent, la valeur numérique du rapport des flèches verticale et horizontale de l'extrémité de la cantilever, sachant que $\theta = 45°$ et $h = 2b$.

Réponse. $u/v = I_y/I_z = 1/4$.

3. Trouver, pour la cantilever de la figure 202, l'angle d'inclinaison β de l'axe neutre sur l'horizontale et la valeur de la contrainte maximum, sachant que $\theta = 45°$ et $h = 2b = 15$ cm, $M = 150$ m·N.

Réponse. $\operatorname{tg} \beta = 4$, $\sigma_{max} = 9{,}9$ bars.

4. Une poutre IPN, en appui simple, est fléchie par deux couples égaux et opposés M s'exerçant sur ses extrémités dans le plan mm (fig. 203). Calculer

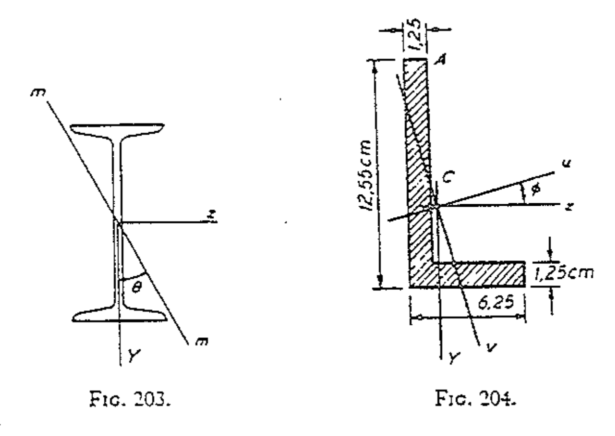


FIG. 203. FIG. 204.

la contrainte et la flèche maximum δ de la poutre, sachant que $I_y = 117$ cm⁴, $I_z = 2\,140$ cm⁴, $M = 5\,750$ m·N, $\theta = 30°$, $l = 3$ m.

Réponse.
$$\sigma_{max} = \frac{4\,M\cos\theta}{I_z} + \frac{2\,M\sin\theta}{I_y} = 585 \text{ bars;}$$

et
$$\delta^2_{max} = \left(\frac{Ml^2\cos\theta}{8\,EI_z}\right)^2 + \left(\frac{Ml^2\sin\theta}{8\,EI_y}\right)^2.$$

5. Une cornière à ailes inégales (fig. 2704) est fléchie par des couples M appliqués aux extrémités et s'exerçant dans le plan de l'aile la plus large. Déterminer les directions des axes principaux u et v, les moments d'inertie principaux I_u et I_v et la contrainte de flexion maximum sachant que $M = 1\,000$ m·N. Vérifier le résultat à l'aide de la formule (132).

51. Flexion des poutres ayant deux plans de symétrie

Lorsqu'une poutre possède deux plans de symétrie, on résout aisément, par la méthode de superposition, le problème de la flexion par des efforts transversaux inclinés sur ces plans et coupant l'axe de la poutre. Chaque effort transversal se décompose suivant deux composantes agissant dans deux plans de symétrie, et, après résolution du problème de la flexion pour chacun de ces plans, on obtient par superposition les contraintes finales et les flèches.

Considérons, par exemple, une poutre cantilever de section rectangulaire (fig. 205) soumise à un effort transversal P appliqué à son extrémité libre sous un angle θ par rapport au plan de symétrie vertical. Décomposons l'effort en deux composantes $P\cos\theta$ et $P\sin\theta$, et considérons la flexion dans les plans de symétrie vertical et horizontal. nous trouvons

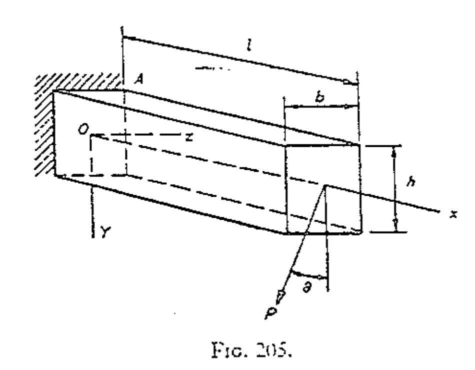


FIG. 205.

que les valeurs absolues des moments fléchissants correspondant à l'extrémité encastrée sont $Pl\cos\theta$ et $Pl\sin\theta$. Compte tenu des directions de ces moments, la contrainte de flexion en un point quelconque de la section encastrée est

$$\sigma = -\frac{Ply\cos\theta}{I_z} + \frac{Plz\sin\theta}{I_y}.$$

La contrainte de traction maximum se situe au point A et sa valeur est

$$\sigma_{max} = \frac{6\,Pl}{bh}\left(\frac{\cos\theta}{h} + \frac{\sin\theta}{b}\right).$$

Les flèches verticale et horizontale à l'extrémité sollicitée sont :

$$\delta_y = \frac{Pl^3\cos\theta}{3\,EI_z}, \qquad \delta_z = -\frac{Pl^3\sin\theta}{3\,EI_y},$$

et la flèche totale se détermine par l'équation

$$\delta = \sqrt{\delta_y^2 + \delta_z^2}.$$

Problèmes

1. Une poutre horizontale en bois, de section rectangulaire, supporte une charge verticale uniformément répartie sur l'axe ; elle est appuyée sur ses extrémités de la manière indiquée sur la figure 206. Déterminer la contrainte normale maximum et la flèche verticale au milieu, sachant que la longueur de la poutre est $l = 3{,}05$ m, l'intensité de la charge $q = 2\,976{,}3$ N/m. $h = 20{,}32$ cm, $b = 15{,}24$ cm et tg $\alpha = \frac{1}{3}$.

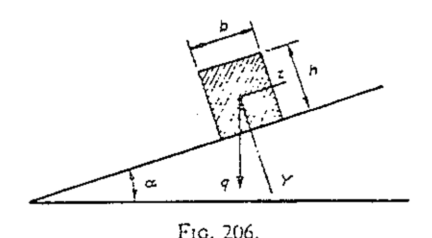


Fig. 206.

Réponse. $\sigma_{max} = 45{,}21$ bars, $\delta = 0{,}32$ cm.

2. Résoudre le problème précédent en supposant que la distance entre appuis est 1,80 m et que la poutre comporte deux porte-à-faux ayant chacun 60 cm de long.

3. Une barre circulaire horizontale de longueur l, à extrémités encastrées, supporte une charge verticale d'intensité q uniformément répartie, et une charge transversale, horizontale P, concentrée au milieu. Déterminer la contrainte maximum, sachant que $Pl = 2\,760$ m · N, $ql = 5\,520$ m · N et le diamètre de la barre est $d = 10$ cm.

Réponse. $\sigma_{max} = 56$ bars.

4. Une poutre carrée horizontale (fig. 207) à extrémités en appui simple est sollicitée par deux forces égales P, appliquées au tiers de la poutre à partir des extrémités, dont l'une est verticale et l'autre horizontale. Calculer σ_{max}, pour $l = 4$ m, $a = 40$ cm, $P = 400$ daN.

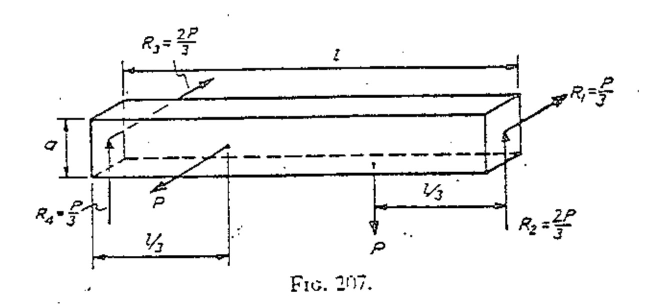


Fig. 207.

Réponse. $\sigma_{max} = \dfrac{2\,Pl}{a^3} = 5$ bars.

52. Flexion des poutres dans un plan principal qui n'est pas de symétrie

Centre de cisaillement. Lors de l'étude de la flexion pure (voir p. 218) nous avons démontré que le plan de la ligne élastique coïncide avec le plan des couples de flexion, à condition que ces couples s'exercent dans l'un des deux *plans principaux de flexion*. Le problème est plus compliqué dans le cas de la flexion d'une poutre soumise à un système coplanaire d'efforts transversaux. Si le plan principal dans lequel s'exercent les efforts n'est pas plan de symétrie de la poutre, alors la flexion s'accompagne généralement d'une torsion de la poutre. L'étude développée dans ce paragraphe précise comment éliminer cette torsion et revenir au cas de la *flexion simple*, par un déplacement adéquat du plan des forces qui lui sont parallèles.

Commençons par des exemples simples où la section de la poutre possède un axe de symétrie (axe z) et où les efforts s'exercent dans un plan perpendiculaire à cet axe (fig. 208). Considérons la poutre mince de la figure 208*a* et déterminons la position du plan vertical dans lequel les charges transversales agissent de manière à produire une flexion simple

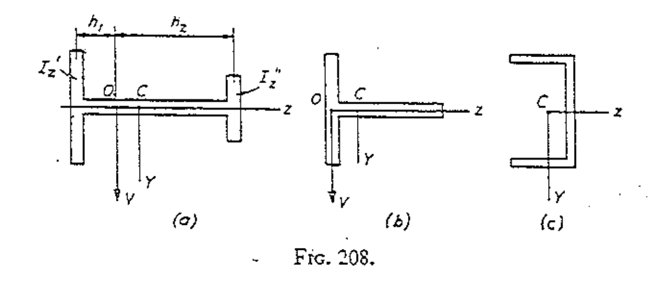


Fig. 208.

de la poutre dans un plan vertical. D'après l'étude concernant la distribution des contraintes de cisaillement verticales τ_{zy} (voir p. 118) on conclut que pratiquement la totalité de l'effort tranchant V est supportée uniquement par les ailes. Si l'on considère les ailes comme deux poutres indépendantes dont les sections ont pour moments d'inertie I_z' et I_z'', alors

leurs courbures et leurs flèches, en flexion, sont égales si les charges ([2]) sont réparties entre elles dans le rapport $I'_z : I''_z$. Les efforts tranchants dans ces ailes sont aussi dans le même rapport. Cette condition est satisfaite si les charges transversales s'exercent dans le plan vertical passant par O (fig. 208*a*), si bien que

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{I''_z}{I'_z},$$

où h_1 et h_2 sont les distances séparant O des centres de gravité des sections des ailes. Ainsi, on constate que le point O est déporté du centre de gravité C de la section vers l'aile dont la section a le plus grand moment d'inertie. Dans le cas de la figure 208*b*, où l'une des ailes a disparu, on suppose, avec une exactitude suffisante, que le point O coïncide avec le centre de gravité de l'aile et que les charges transversales s'exercent dans le plan vertical passant par ce point en vue d'obtenir un cas de flexion simple. Le point O, contenu dans le plan de sollicitation pour que la torsion s'élimine, s'appelle *centre de cisaillement*.

Considérons le profilé ⊔ (fig. 208*c*) et déterminons la position du plan dans lequel agissent les charges verticales de manière à provoquer une flexion simple, avec l'axe z comme axe neutre. Il faut pour cela considérer la distribution des contraintes de cisaillement sur la section en flexion simple. On utilise la même méthode que celle employée dans le cas d'une poutre IPN (p. 118) pour calculer les contraintes de cisaillement verticales τ_{xy} de la section de l'âme, et l'on suppose, avec une exactitude satisfaisante, que l'effort tranchant V est supporté par l'âme seule. Les contraintes horizontales du cisaillement τ_{xz} se situent dans les ailes. Pour calculer la valeur de ces contraintes considérons un élément découpé dans l'aile par deux sections très voisines, distantes de dx et par un plan vertical mnm_1n_1, parallèle à l'âme (fig. 209). Si le profilé fléchi est convexe vers le bas alors l'aile inférieure est en traction et les efforts de traction N, $N+\mathrm{d}N$ s'exerçant sur l'élément considéré sont égaux à

$$N = \frac{M}{I_z}\int y\mathrm{d}A$$

et

$$N+\mathrm{d}N = \frac{M+\dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x}{I_z}\int y\mathrm{d}A\,,$$

([2]) On néglige ici l'influence de l'effort tranchant sur la flèche des ailes.

où l'intégration est étendue à toute la portion hachurée de la section d'aile. L'intégrale représente le moment de l'aire hachurée par rapport à l'axe z. La différence des tractions N et $N+\mathrm{d}N$ est égale à la somme des contraintes de cisaillement τ_{zx} s'exerçant sur le côté mnm_1n_1 de l'élément.

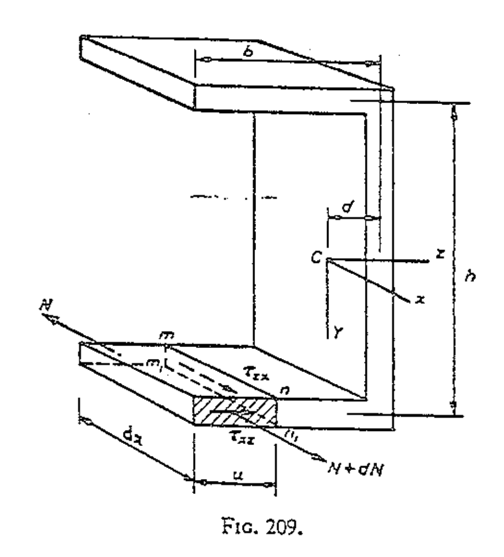


FIG. 209.

Supposons que ces contraintes sont uniformément réparties sur cette face et soit t l'épaisseur de l'aile, on calcule alors τ_{zx} par l'équation :

$$\tau_{zx}t\mathrm{d}x = -\mathrm{d}N = -\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{I_z}\int y\mathrm{d}A\,,$$

d'où

$$\tau_{zx} = -\frac{V}{tI_z}\int y\mathrm{d}A\,. \qquad (a)$$

Le moment de l'aire hachurée est proportionnel à la distance u du bord de l'aile ; par suite τ_{zx} est proportionnel à u. Comme nous l'avons démontré précédemment (voir p. 110), les contraintes de cisaillement τ_{xz}, égales à τ_{zx}, s'exercent horizontalement sur le segment nn_1 dans la section de l'aile. Donc, les contraintes τ_{xz} sont non-uniformément réparties sur la section de l'aile mais sont proportionnelles à u. Sur la ligne de jonction de l'âme et de l'aile la répartition des contraintes de cisaillement est extrêmement compliquée. Dans le calcul approché nous supposerons que l'équation (a) est valable entre $u = 0$ et $u = b$. Par suite, désignons par h

la distance entre les centres de gravité des ailes et remarquons que le moment de la section bt de l'aile, par rapport à l'axe z, est $bt(h/2)$, nous obtenons, d'après (a),

$$(\tau_{xz})_{\max} = (\tau_{zx})_{\max} = -\frac{Vbh}{2I_z}. \qquad (b)$$

La résultante R (fig. 210) des contraintes de cisaillement τ_{xz} réparties sur l'aire bt de la section d'aile est

$$R = \frac{Vbh}{2I_z}\cdot\frac{bt}{2} = \frac{Vb^2ht}{4I_z}. \qquad (c)$$

La somme des contraintes de cisaillement τ_{xz}, sur la section d'aile supérieure, est évidemment une force égale et opposée. Donc les cisaillements, sur une section, réduisent les effors représentés sur la figure 210. Ce système d'efforts est statiquement équivalent à l'effort V appliqué en O et situé à la distance

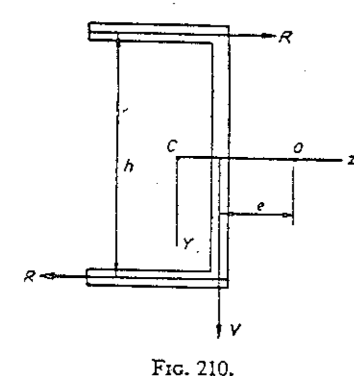


FIG. 210.

$$e = \frac{Rh}{V} = \frac{b^2h^2t}{4I_z}. \qquad (d)$$

du centre de l'âme.

On constate donc que, pour obtenir une flexion simple, avec l'axe z comme axe neutre, le plan vertical dans lequel s'exercent les charges transversales doit passer par le point O, appelé *centre de cisaillement*. Pour une position différente de ce plan, la flexion de la poutre s'accompagne d'une torsion, et les contraintes ne dépendent plus d'une loi simple où σ_z est proportionnel à y et indépendant de z.

Dans le cas de la flexion dans un plan vertical d'une cornière (fig. 211), le cisaillement τ, aux points situés sur mn, a le sens indiqué sur la figure et sa valeur est (³)

$$\tau = \frac{V}{tI_z}\int y\,dA,$$

l'intégrale représente le moment de l'aire hachurée par rapport à l'axe z.

(³) On utilise la même méthode pour calculer ces contraintes dans le cas de sections ⊏.

La résultante de ces contraintes de cisaillement a la direction indiquée sur la figure 211b, sa valeur est

$$R = \frac{Vb^3t}{3I_z\sqrt{2}}.$$

On obtient une force égale pour l'aile inférieure. La résultante de ces deux forces est égale à V et passe par le point d'intersection O des lignes moyennes des ailes, ce point est donc le centre de cisaillement.

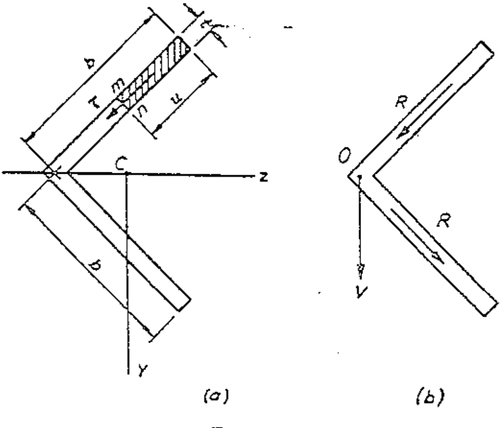


FIG. 211.

Dans les cas précédents nous avons considéré des poutres ayant un plan de symétrie et déformées perpendiculairement à ce plan. Donc, le centre de cisaillement se situe sur l'axe de symétrie de la section et pour déterminer sa position il suffit de connaître une coordonnée. Considérons alors une poutre non symétrique pour laquelle deux coordonnées sont nécessaires à la détermination du centre de cisaillement (⁴). Prenons, par exemple, un profilé ⊏ d'épaisseur uniforme t mais à ailes inégales (fig. 212). Considérons les axes y, z respectivement parallèles à l'âme et aux ailes, supposons d'abord que les

(⁴) Plusieurs auteurs ont étudié le problème de la détermination du centre de cisaillement. Voir, par exemple, A. A. GRIFFITH et G. I. TAYLOR, *Advisory Comm. Aeronaut.*, Angleterre, *Tech. Repts.*, vol. 3, p. 950, 1917; R. MAILLART, *Schweiz. Bauzeitung*, vol. 77, p. 97, vol. 79, p. 254 et vol. 83, pp. 111 et 176; C. WEBER, *Z. angew. Math. u. Mech.*, vol. 4, p. 334, 1924; A. EGGENSCHWYLER, *Proc. 2d. Internat. Congr. Appl. Mech.*, p. 434, 1926, Zurich. Voir aussi les notes de l'auteur *J. Franklin Inst.*, vol. 239, p. 201, 1945. De nos jours ce problème est devenu très important en aéronautique. Une revue des ouvrages traitant du sujet est donnée par P. KUHN dans *Nat. Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Notes*, n° 691.

efforts transversaux s'exerçant sur le profilé sont parallèles à l'âme et situés, par rapport à cette âme, de manière que le profilé ne subisse pas de torsion. L'effort tranchant vertical V_y est supporté par l'âme seule.

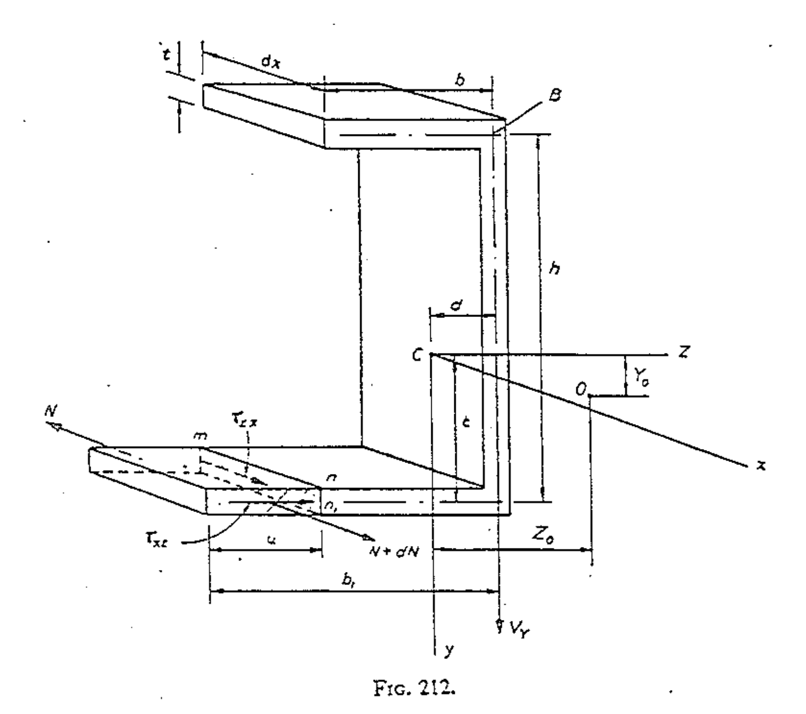


Fig. 212.

Opérons comme précédemment, pour calculer les efforts tranchants horizontaux dans les âmes et considérons les efforts s'exerçant sur un élément de l'aile inférieure (voir fig. 212). On détermine l'effort longitudinal N, agissant sur l'élément, à l'aide de l'équation (132) des contraintes normales longitudinales. Nous avons alors

$$N = \int \sigma_x \mathrm{d}A = \frac{M_z}{I_z I_y - I_{yz}^2}\left(I_y \int y\mathrm{d}A - I_{yz} \int z\mathrm{d}A\right),$$

où les intégrales du second membre représentent les moments, par rapport aux axes z et y, de l'aire hachurée (fig. 212), donc

$$\int y\mathrm{d}A = ctu$$

et

$$\int z\mathrm{d}A = -tu\left(b_1 - d - \frac{u}{2}\right) = t\left(\frac{u^2}{2} + du - b_1 u\right).$$

Nous obtenons par dérivation

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = \frac{V_y \mathrm{d}x}{I_z I_y - I_{yz}^2}\left[I_y ctu - I_{yz} t\left(\frac{u^2}{2} + du - b_1 u\right)\right],$$

et l'équation d'équilibre de l'élément considéré est

$$t\tau_{zx}\mathrm{d}x = \frac{-V_y \mathrm{d}x}{I_z I_y - I_{yz}^2}\left[I_y ctu - I_{yz} t\left(\frac{u^2}{2} + du - b_1 u\right)\right].$$

La contrainte de cisaillement horizontale sur la section de l'aile est alors

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{-V_y}{I_z I_y - I_{yz}^2}\left[I_y cu - I_{yz}\left(\frac{u^2}{2} + du - b_1 u\right)\right],$$

et l'effort tranchant correspondant dans l'aile est

$$t\int_0^{b_1} \tau_{xz}\mathrm{d}u = \frac{-V_y b_1^2 t}{I_z I_y - I_{yz}^2}\left[\frac{I_y c}{2} - I_{yz}\left(\frac{d}{2} - \frac{b_1}{3}\right)\right]. \qquad (e)$$

Puisque les efforts s'exerçant sur le profilé sont tous verticaux, les efforts tranchants horizontaux dans les ailes forment un couple obtenu en multipliant l'effort tranchant dans l'aile inférieure par h. Le moment [5], par rapport au centre de gravité C (fig. 212), de toutes les contraintes de cisaillement agissant sur la section est donc

$$V_y\left\{d + \frac{b_1^2 ht}{I_z I_y - I_{yz}^2}\left[\frac{I_y c}{2} - I_{yz}\left(\frac{d}{2} - \frac{b_1}{3}\right)\right]\right\},$$

ce moment indique que le plan vertical dans lequel les efforts extérieurs s'exercent de façon à provoquer la flexion, sans torsion, du profilé se trouve à la distance

$$z_0 = d + \frac{b_1^2 ht}{I_z I_y - I_{yz}^2}\left[\frac{I_y c}{2} - I_{yz}\left(\frac{d}{2} - \frac{b_1}{3}\right)\right] \qquad (f)$$

du centre de gravité C de la section. Dans le cas particulier où les ailes sont égales, les axes y et z sont des axes principaux, I_{yz} disparaît, $c = h/2$, et l'on obtient

$$z_0 = d + \frac{b_1^2 h^2 t}{4 I_z},$$

compatible avec le résultat (d) obtenu précédemment (voir p. 228).

[5] Un moment dirigé dans le sens des aiguilles d'une montre est supposé positif.

La distance z_0 représente la coordonnée horizontale du centre de cisaillement O. Pour déterminer y_0 on suppose que les efforts transversaux extérieurs agissent dans un plan parallèle au plan xz. Enfin, le calcul des contraintes normales σ_z s'effectue à l'aide de l'équation (133). Considérons à nouveau l'élément hachuré de la figure 212 et opérons comme auparavant, nous écrivons

$$t\tau_{zx} = \frac{-V_z}{I_z I_y - I_{yz}^2}\left[I_{yz} c t u - I_z t\left(\frac{u^2}{2} + du - b_1 u\right)\right].$$

L'effort tranchant horizontal dans l'aile inférieure est

$$t\int_0^{b_1} \tau_{zx} du = \frac{-V_z b_1^2 t}{I_z I_y - I_{yz}^2}\left[\frac{I_{yz}c}{2} - I_z\left(\frac{d}{2} - \frac{b_1}{3}\right)\right].$$

Considérons le moment de cet effort par rapport au point B (fig. 212) et divisons-le par l'effort tranchant horizontal V_z augmenté des efforts extérieurs, nous obtenons la distance f du plan d'action des efforts au point B. L'ordonnée cherchée y_0 du centre de cisaillement est donc

$$y_0 = f + c - h = c - h + \frac{b_1^2 h t}{I_z I_y - I_{yz}^2}\left[\frac{I_{yz}c}{2} - I_z\left(\frac{d}{2} - \frac{b_1}{3}\right)\right]. \qquad (g)$$

Dans le cas particulier d'ailes égales, nous avons $I_{yz} = 0$, $c = h/2$ et en évaluant d et I_y on démontre que l'équation (g) disparaît et que le centre de cisaillement se trouve dans l'axe z. Les coordonnées y_0, z_0 données par les équations (f) et (g), définissent complètement la position du centre de cisaillement du profilé ⊔ de la figure 212.

Fig. 213.

Dans le cas d'un profilé en ¬_ (fig. 213), on considère d'abord l'action des efforts transversaux dans un plan parallèle à l'âme et l'on détermine une équation identique à (e), on démontre facilement que les efforts tranchants horizontaux dans les ailes disparaissent. Par suite, la coordonnée z_0 du centre de cisaillement disparaît aussi. Ensuite, on considère les efforts transversaux agissant dans un plan horizontal, nous constatons que les efforts tranchants horizontaux valent $\frac{1}{2} V_z$, ce qui prouve que le plan de sollicitation horizontale passe par le centre de gravité C. Donc $y_0 = 0$ et ainsi le centre de cisaillement est confondu avec le centre de gravité C.

Dans tous les cas où les ailes des poutrelles se coupent suivant un axe O, comme dans les différents schémas de la figure 214, l'effort tranchant résultant passe par le même axe et ce dernier est évidemment l'axe du centre de cisaillement.

Revenons enfin au cas général de la flexion des poutres non symétriques, on conclut, d'après ce qui précède, que les efforts extérieurs doivent être répartis sur l'axe du centre de cisaillement afin de se placer

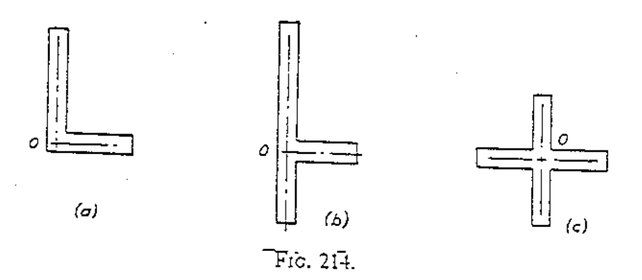


Fig. 214.

dans le cas de la flexion simple d'une poutre (flexion sans torsion). On utilise, pour le calcul des flèches produites par ces efforts, les mêmes méthodes que dans le cas de la flexion pure (voir § 50). On peut décomposer chaque effort en deux composantes parallèles aux axes principaux passant par le centre de gravité de la section de poutre, étudier la flexion de la poutre dans chacun des plans principaux en appliquant les formules usuelles des poutres et obtenir enfin les déformations complètes par sommation géométrique des flèches obtenues pour les deux plans principaux.

Une autre méthode consiste à prendre les axes y et z parallèles à l'âme et aux ailes de la poutre (voir fig. 212), à décomposer chaque effort transversal suivant deux composantes parallèles aux axes y et z, et à utiliser les formules (131) pour les efforts dans le plan xy. On établit des formules identiques pour les efforts dans le plan xz. Les déformations finales s'obtiennent encore par sommation géométrique.

9

FLEXION ET CHARGE AXIALE COMBINÉES THÉORIE DES POTEAUX

53. Flexion accompagnée de traction ou compression

Nous supposerons ici qu'une barre prismatique est sollicitée par des efforts appliqués dans l'un de ses plans de symétrie, mais, tandis que dans l'étude précédente il ne s'agissait que d'efforts transversaux, nous aurons maintenant des composantes suivant l'axe de la barre. La figure 215 représente un cas simple de cette nature : un poteau sollicité par un effort oblique P. Cet effort est décomposé suivant une composante transversale N et une composante longitudinale T, on suppose d'autre part, que le poteau est relativement rigide et sa flèche si faible qu'on peut la négliger lors de l'étude des contraintes dues à T. Par suite la contrainte résultante, en un point quelconque, s'obtient par superposition de la compression due à l'effort T et de la contrainte de flexion produite par la charge transversale N. On étudiera ultérieurement le cas d'un poteau flexible dans lequel la poussée, due à la déformation (fig. 215*b*), a une influence considérable sur la flexion (§ 56). La contrainte produite par T est constante pour toutes les sections du poteau et est égale à T/A, A représente l'aire de la section. La contrainte de flexion dépend du moment qui croît de zéro au sommet jusqu'au maximum Nl à la base. Donc, la section dangereuse se situe à l'extrémité encastrée où la contrainte, pour un point situé à la distance y de l'axe z, est

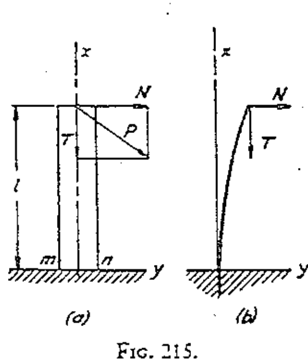


FIG. 215.

$$\sigma_x = -\frac{Nly}{I_z} - \frac{T}{A}. \qquad (a)$$

Supposons, par exemple, que la section du poteau de la figure 215*a* est un rectangle de côtés b et h, avec h parallèle au plan de flexion, nous

avons $A = bh$ et $I_z = bh^3/12$. Par suite, la contrainte de compression maximum se situe au point n et sa valeur est

$$(\sigma_x)_{min} = -\frac{6\,Nl}{bh^2} - \frac{T}{bh}. \qquad (b)$$

Cette contrainte est la plus grande en valeur absolue. Au point m nous avons

$$(\sigma_x)_{max} = \frac{6\,Nl}{bh^2} - \frac{T}{bh}.$$

Lorsque l'effort P n'est pas parallèle à l'un des deux plans de symétrie, les contraintes de flexion, produites par sa composante transversale N, se déterminent en décomposant N suivant des parallèles à ces plans (voir à ce sujet l'étude du § 51). On obtient la contrainte résultante en un point quelconque par superposition de ces contraintes de flexion et de la contrainte de compression produite par l'effort longitudinal.

Problèmes

1. Déterminer la contrainte de compression maximum dans les mâts circulaires en bois de 6 m de haut et 20 cm de damètre (fig. 216), sachant

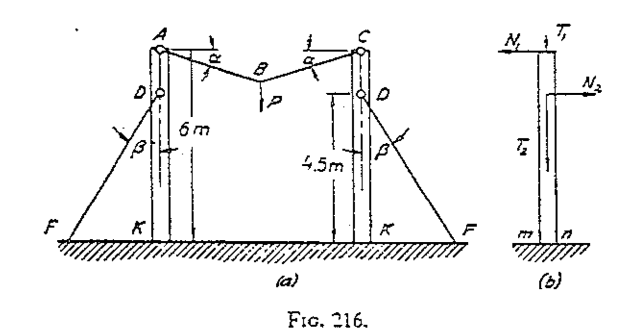


FIG. 216.

que la charge P appliquée sur le câble ABC est 270 N. La tension dans chacun des haubans DF est $S = 4\,500$ N ; tg $\alpha = \frac{1}{10}$; sin $\alpha = \frac{1}{3}$ et $DK = 4{,}50$ m.

Solution. Les composantes de l'effort dans le câble BC (fig. 216*b*) sont $N_1 = 1\,350$ N, $T_1 = 135$ N. Les composantes de l'effort dans le câble DF sont $N_2 = 900$ N, $T_2 = 4\,410$ N. Le moment fléchissant est maximum à

l'extrémité encastrée, $M_{max} = 4\,050$ m · N. La poussée dans cette même section est $T_1 + T_2 = 4\,545$ N. La contrainte de compression maximum au point m est

$$\sigma = \frac{4 \times 454{,}5}{\pi d^2} + \frac{32 \times 40\,500}{\pi d^2} = 1{,}5 + 51{,}5 = 53 \text{ bars}.$$

2. Déterminer la contrainte de traction maximum dans la poutre rectangulaire en bois de la figure 217, sachant que $S = 18\,000$ N, $b = 20$ cm, $h = 25$ cm.

Réponse. $$(\sigma_x)_{max} = \frac{6 \times 450 \times 180}{20 \times 625} + \frac{1\,800}{20 \times 25} = 42{,}5 \text{ bars}.$$

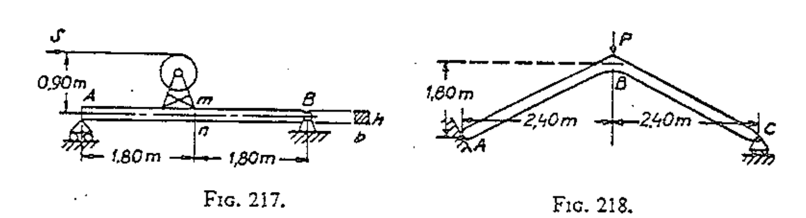


Fig. 217. Fig. 218.

3. Déterminer la compression maximum dans le système ABC qui supporte une charge $P = 9\,000$ N (fig. 218). L'assemblage des barres en B est parfaitement rigide, les appuis sont constitués par une articulation fixe en A et un appui mobile en C. La section des barres AB et BC est un carré de 25×25 cm.

Réponse.

$$\sigma = \frac{6 \times 450 \times 240}{25 \times 625} + \frac{270}{625} = 42 \text{ bars}.$$

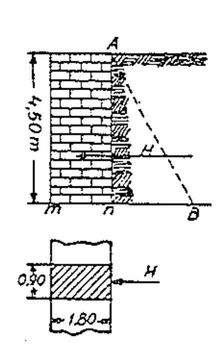


Fig. 219.

4. Un mur de soutènement en briques, de 1,80 m d'épaisseur et 4,50 m de haut, contient la poussée des terres (fig. 219). Déterminer les contraintes de traction et de compression maximums à la base du mur. Le poids spécifique de ce dernier est $\gamma = 25{,}4$ kN/m et la poussée des terres est 50 kN/m de mur. La répartition de la poussée des terres suivant la hauteur du mur est linéaire et figurée par la droite AB.

Réponse. La contrainte en m est égale à

$$-\frac{2{,}5 \times 450}{10^3} - \frac{6 \times 50 \times 150}{180^2} = -1{,}125 - 1{,}390 = -2{,}515 \text{ bars}.$$

La contrainte en n est égale à

$$-\frac{2{,}5 \times 450}{10^3} + \frac{6 \times 50 \times 150}{180^2} = 0{,}265 \text{ bars}.$$

5. Déterminer l'épaisseur du mur du problème 4 de façon que la contrainte soit nulle en n.

Réponse. 2 m.

6. Un poteau circulaire de 1,80 m de haut (fig. 215) est soumis à l'action d'un effort P dont les composantes N et T sont respectivement égales à 5 000 N. Trouver le diamètre du poteau sachant que la compression maximum est 70 bars.

7. Déterminer σ_{max} et σ_{min} dans la section médiane de la barre BC (fig. 218), si, au lieu d'une charge concentrée P, on applique une charge verticale $q = 6\,000$ N/m uniformément répartie sur l'axe ABC.

8. Une barre circulaire AB (fig. 220), articulée en B et en appui (sans frottement) contre une surface lisse verticale en A, est soumise à l'action de son propre poids. Déterminer la position de la section mn où la compression est maximum.

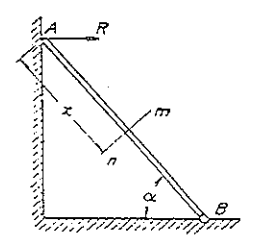


Fig. 220.

Solution. Soit l la longueur de la barre, q son poids par unité de longueur et α son inclinaison par rapport à l'horizontale. La réaction horizontale en A est $R = (ql/2)\cot g\,\alpha$. La compression en une section quelconque mn, située à la distance x de A, est $qx \sin\alpha + (ql/2)(\cos^2\alpha/\sin\alpha)$. Le moment fléchissant dans cette même section est

$$M = \frac{ql}{2} x \cos\alpha - \frac{qx^2 \cos\alpha}{2}.$$

La compression maximum dans la section mn est

$$\frac{4}{\pi d^2}\left(qx \sin\alpha + \frac{ql}{2}\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}\right) + \frac{32}{\pi d^3}\left(\frac{ql}{2} x \cos\alpha - \frac{qx^2 \cos\alpha}{2}\right),$$

où d est le diamètre de la barre.

Annulant la dérivée, par rapport à x, de cette contrainte on obtient la distance cherchée :

$$x = \frac{l}{2} + \frac{d}{8}\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

9. La barre de la figure 215 mesure 1,80 m de long et sa section circulaire a 30 cm de diamètre. Déterminer la valeur de l'effort P sachant que ses

composantes N et T sont égales et que la compression maximum en n est égale à 70 bars.

Réponse. $P = 1\,430$ daN.

10. Un effort P provoque la flexion de la barre ABC encastrée en A (fig. 221). Déterminer l'angle de rotation en C, pendant la flexion, sachant que les moments fléchissants en A et B sont égaux en valeur absolue.

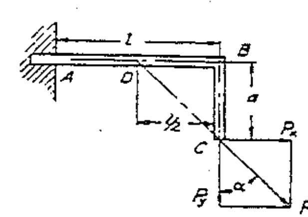


FIG. 221.

Solution. D'après l'égalité des moments fléchissants en A et B il découle que l'effort P passe par le milieu D de la barre AB. Par suite, $P_x = P_y l/2\,a$ et l'on détermine les composantes P_x et P_y. La rotation de la section B, due à la flexion de la portion AB sous l'action de P_y, est $P_y l^2/2\,EI$, et s'effectue dans le sens des aiguilles d'une montre. La rotation de la même section, provoquée par la composante P_x, est $P_x al/EI$ dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. La rotation de la section C par rapport à la section B, due à la flexion de BC, est $P_x a^2/2\,EI$ en sens inverse des aiguilles d'une montre. L'angle de rotation totale de l'extrémité C dans le sens des aiguilles d'une montre est

$$\frac{P_y l^2}{2\,EI} - \frac{P_x al}{EI} - \frac{P_x a^2}{2\,EI} = -\frac{P_x a^2}{2\,EI}.$$

11. Un cadre ABC à trois articulations (fig. 222) supporte une charge verticale P. Calculer la valeur absolue du moment fléchissant maximum M_{max} dans le cadre et l'effort de compression N dans les barres horizontales.

Réponse. $M_{max} = \dfrac{Pl}{4}$, $N = \dfrac{Pl}{4\,h}$.

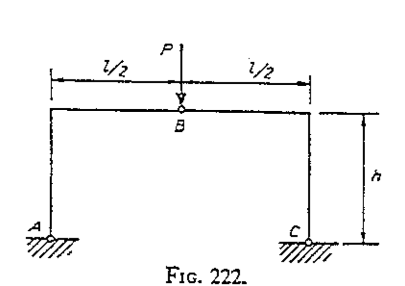


FIG. 222.

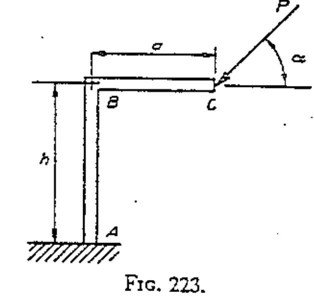


FIG. 223.

12. Trouver l'angle d'inclinaison α de l'effort P s'exerçant sur la barre ABC (fig. 223), sachant que la flèche en B est nulle.

Réponse. $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{2\,h}{3\,a}$.

54. Sollicitation excentrée d'un poteau court

La sollicitation excentrée est un cas particulier de la combinaison des contraintes directes et de flexion. Lorsque la longueur de la barre est petite par rapport à ses dimensions latérales, sa flèche est si petite qu'on peut la négliger en comparaison de l'excentricité initiale e, et l'on utilisera la méthode de superposition [1]. Prenons, par exemple, le cas de la compression par un effort longitudinal P appliqué, avec une excentricité e (fig. 224), sur l'un des deux axes principaux de la section. Si nous appliquons deux efforts égaux et opposés au centre de gravité O de cette section, nous ne modifions pas le problème puisque le système ajouté est équivalent à zéro. La compression axiale obtenue alors par l'effort P produit des contraintes de compression directes $-P/A$ (voir fig. 224b), et la flexion dans l'un des plans principaux, due au couple Pe, donne lieu à des contraintes de flexion $-(Pey/I_z)$ (fig. 224c). La contrainte totale est alors

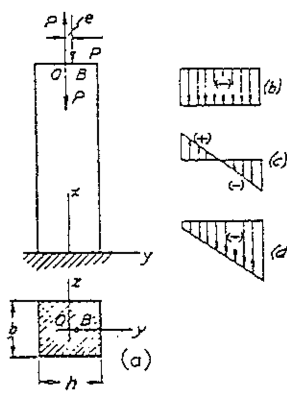


FIG. 224.

$$\sigma_x = -\frac{P}{A} - \frac{Pey}{I_z}. \qquad (a)$$

Le diagramme de répartition de cette contrainte totale est représenté sur la figure 224d. On suppose, sur la figure 224d, que la contrainte de flexion maximum est inférieure à la contrainte directe, si bien que des contraintes de compression apparaissent sur la section entière de la barre. Si la contrainte de flexion maximum est supérieure à la contrainte de compression directe, il existe une droite de contrainte nulle, parallèle à l'axe z, divisant la section en deux zones : la zone des contraintes de traction à gauche et la zone des contraintes de compression à droite.

Pour une section rectangulaire de côtés h et b (fig. 224a), l'équation (a) devient :

$$\sigma_x = -\frac{P}{bh} - \frac{12\,Pey}{bh^3} \qquad (a')$$

[1] Pour le cas de la sollicitation excentrée des longues barres voir § 56.

et l'on obtient, en posant $y = -(h/2)$,

$$(\sigma_x)_{\max} = -\frac{P}{bh} + \frac{6\,Pe}{bh^2} = \frac{P}{bh}\left(-1 + \frac{6\,e}{h}\right). \qquad (b)$$

En posant $y = h/2$, nous avons

$$(\sigma_x)_{\min} = -\frac{P}{bh} - \frac{6\,Pe}{bh^2} = -\frac{P}{bh}\left(1 + \frac{6\,e}{h}\right). \qquad (c)$$

On constate que lorsque $e < h/6$ les contraintes ne changent pas de signe sur la section. Lorsque $e = h/6$, la contrainte de compression maximum, d'après (c), est $2P/bh$ et, sur le côté opposé de la section restangulaire, la contrainte est nulle. Lorsque $e > h/6$, la contrainte change de signe et l'on obtient la position de la droite de contrainte nulle en égalant à zéro l'expression générale (a') de σ_x, d'où

$$y = -\frac{h^2}{12\,e}; \qquad (d)$$

ou, en désignant par k_z le *rayon de giration* par rapport à l'axe z (voir appendice),

$$y = -\frac{k_z^2}{e}. \qquad (134)$$

On remarque que la distance entre la droite de contrainte nulle et le centre de gravité O diminue lorsque l'excentricité e augmente. Cette étude reste également valable dans le cas d'une sollicitation excentrée en traction. L'équation (134) s'utilise aussi pour d'autres types de sections, lorsque, par exemple, le point d'application de la charge se situe sur l'un des axes principaux d'inertie.

Considérons le cas où B, point d'application de l'effort de compression excentré P, ne se trouve pas sur l'un des axes principaux de la section, représentés par les axes y et z sur la figure 225. Soit m et n les coordonnées de ce point, les moments de P, par rapport aux axes y et z, sont Pn et Pm.

Par superposition, la contrainte en un point quelconque F de la section est

$$\sigma_x = -\frac{P}{A} - \frac{Pmy}{I_z} - \frac{Pnz}{I_y}, \qquad (e)$$

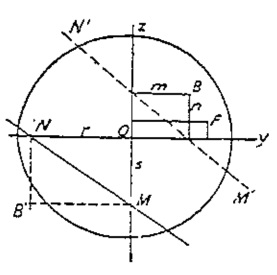


FIG. 225.

où le premier terme du second membre représente la contrainte directe et les deux autres termes les contraintes de flexion produites respectivement par les moments Pm et Pn. On constate que la répartition des contraintes est linéaire. L'équation de la droite de contrainte nulle s'obtient en annulant le second membre de l'équation (e). Utilisons la notation $I_z/A = k_z^2$ et $I_y/A = k_y^2$, où k_z et k_y sont les rayons de giration par rapport aux axes z et y, on trouve

$$\frac{my}{k_z^2} + \frac{nz}{k_y^2} + 1 = 0. \qquad (f)$$

En faisant dans cette équation, d'abord $y = 0$, puis $z = 0$, nous obtenons les points M et N d'intersection de la droite de contrainte nulle avec les axes de coordonnées z et y (fig. 225). Les coordonnées s et r de ces points sont :

$$s = -\frac{k_y^2}{n}, \qquad r = -\frac{k_z^2}{m}. \qquad (g)$$

On tire de ces équations :

$$n = -\frac{k_y^2}{s}, \qquad m = -\frac{k_z^2}{r}.$$

Ces dernières ont même forme que les équations (g) et l'on conclut que lorsque la charge est appliquée en B, de coordonnées s et r, la droite de contrainte nulle correspondante est représentée par $N'M'$, en tirets sur la figure, qui intercepte les axes y et z aux points de coordonnées respectives m et n.

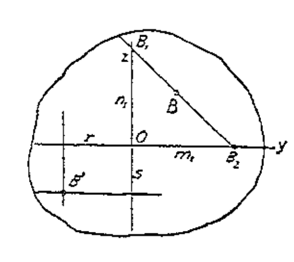


FIG. 226.

Il existe une autre relation importante entre le point d'application B de la charge et la position de la droite de contrainte nulle correspondante ; elle est définie par la rotation de la droite de contrainte nulle autour d'un point fixe B' lorsque B se déplace sur B_1B_2 (fig. 226). La démonstration s'effectue de la manière suivante : on décompose la charge en B suivant deux composantes parallèles passant l'une par B_1 et l'autre par B_2. La composante en B_1 s'exerce dans le plan principal xz, par suite, la droite de contrainte nulle correspondante est parallèle à l'axe y et son ordonnée, déterminée par une équation analogue à (134), est

$$s = -\frac{k_y^2}{n_1}. \qquad (h)$$

De même la droite de contrainte nulle de la composante B_2 est parallèle à l'axe z et son abscisse est

$$r = -\frac{k_z^2}{m_1}. \qquad (i)$$

Pour une position quelconque de la charge sur B_1B_2, la contrainte en B' est nulle. Donc, lorsque le point d'application de la charge se déplace sur la droite B_1B_2, la droite de contrainte nulle correspondante tourne autour de B', dont les coordonnées sont déterminées par les équations (h) et (i).

Problèmes

1. L'aire de la section d'une barre carrée est réduite de moitié en mn (fig. 227). Déterminer la contrainte de traction maximum produite dans cette section, par une charge axiale P.

Réponse. $$(\sigma_z)_{max} = \frac{2P}{a^2} + \frac{Pa}{4}\frac{24}{a^3} = \frac{8P}{a^2}.$$

2. Résoudre le problème ci-dessous en supposant que la barre a une section circulaire.

Fig. 227.

3. Une barre en T est soumise à des efforts excentrés P (fig. 228). Déterminer les contraintes de traction et compression maximums dans cette barre, sachant que $d = 2,5$ cm, $h = 12,5$ cm. la largeur de l'aile est $b = 12,5$ cm, $P = 18$ kN.

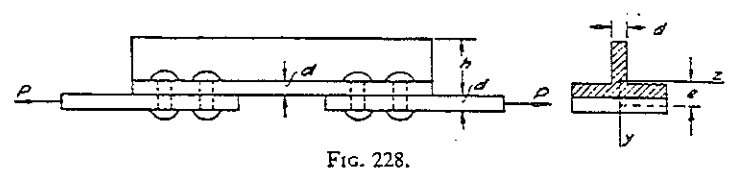


Fig. 228.

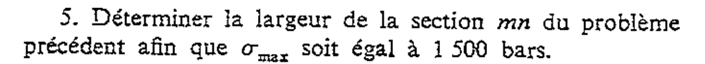
Solution. Les distances du centre de gravité de la section 1, comptées à partir de la base et du sommet, sont respectivement $h_1 = 4,03$ cm et $h_2 = 8,47$ cm. L'excentricité de l'effort P est $e = 1,25 + 4,03 = 5,28$ cm. Le moment d'inertie $I_z = 767,2$ cm⁴. Les contraintes de flexion ont pour valeur :

$$(\sigma_z)_{max} = \frac{Peh_1}{I_z} = \frac{1\,800 \times 5.28 \times 4,03}{767,2} = 50 \text{ bars},$$

$$(\sigma_z)_{min} = -\frac{Peh_2}{I_z} = -\frac{1\,800 \times 5,28 \times 8,47}{767,2} = -105 \text{ bars}.$$

Associons ces contraintes à la contrainte directe $P/A = 32$ bars, nous obtenons la contrainte de traction maximum $50 + 32 = 82$ bars et la compression maximum est $105 - 32 = 73$ bars.

4. Déterminer la traction maximum dans la section mn de la presse schématisée sur la figure 229. On suppose que $P = 136,08$ daN, $b = 76$ mm et que la section est un rectangle de dimensions 25×6 mm.



Réponse. $\sigma_{max} = 16$ hectobars.

5. Déterminer la largeur de la section mn du problème précédent afin que σ_{max} soit égal à 1 500 bars.

Fig. 229.

6. Trouver les contraintes maximum et minimum dans la section encastrée du poteau rectangulaire de la figure 224, sachant que $b = 25$ cm, $h = 30$ cm, $P = 25$ kN et les coordonnées du point B d'application de la charge (fig. 225) sont $m = n = 5$ cm. Déterminer la position de l'axe neutre.

55. Noyau central d'une section

Dans le paragraphe précédent nous avons démontré que pour une faible excentricité e les contraintes normales ont même signe dans toutes les sections d'une barre soumise à une sollicitation excentrée. Pour des valeurs non négligeables de e la droite de contrainte nulle coupe la section avec changement de signe de la contrainte. Dans le cas d'un matériau peu résistant à la traction, le béton ou les maçonneries en briques par exemple, le problème se pose de déterminer la région d'application de la charge de compression de manière que celle-ci ne produise aucune traction dans la section. Cette région s'appelle *noyau de la section*. La méthode de détermination du noyau est exposée dans les exemples simples qui suivent.

Dans le cas d'une *section circulaire* de rayon R, on conclut, par raison de symétrie, que le noyau est un cercle. Le rayon a de ce cercle s'obtient par la condition suivante : lorsque le point d'application de la charge est sur le contour du noyau, la droite de contrainte nulle correspondante est tangente au contour de la section. Puisque le moment d'inertie d'un cercle, par rapport à un diamètre, est $\pi R^4/4$ (voir appendice), et comme le rayon de giration est $k = \sqrt{I/A} = R/2$, nous trouvons d'après (134) (voir p. 240), en y remplaçant e par a et $-y$ par R,

$$a = \frac{k^2}{R} = \frac{R}{4}, \qquad (135)$$

c'est-à-dire que le rayon du noyau représente le quart du rayon de la section.

Dans le cas d'une *section annulaire* de rayon extérieur R_o et de rayon extérieur R_i, nous avons

$$I = \frac{\pi}{4}(R_o^4 - R_i^4), \qquad k^2 = \frac{I}{A} = \frac{R_o^2 + R_i^2}{4},$$

et le rayon du noyau, d'après (134), devient

$$a = \frac{k^2}{R_o} = \frac{R_o^2 + R_i^2}{4\,R_o}. \qquad (136)$$

Fig. 230.

Pour $R_i = 0$, l'équation (136) est identique à l'équation (135). Pour un anneau étroit, R_i tendant vers R_o, le rayon a du noyau tend vers $R_o/2$.

Dans le cas d'une *section rectangulaire* (fig. 230), la droite de contrainte nulle coïncide avec cg lorsque la charge est appliquée en A, à la distance $b/6$ du centre de gravité (voir p. 240). De la même manière la droite de contrainte nulle coïncide avec gf lorsqu'on applique la charge en B, à la distance $h/6$ du centre de gravité. Lorsque la charge se déplace sur AB, l'axe neutre tourne autour du point g (voir p. 241) sans rencontrer la section. Par suite, AB est l'un des côtés du noyau central. Les autres côtés s'en déduisent par symétrie. Le noyau est donc un losange à diagonales $h/3$ et $b/3$ égales. Tant que le point d'application de la charge reste à l'intérieur du losange, la droite de contrainte nulle ne coupe pas la section et donc la contrainte ne change pas de signe.

Pour un profilé I (fig. 231) les positions extrêmes des droites de contrainte nulle, pour lesquelles elles ne rencontrent pas la section, sont données par les côtés AB, CD et par les lignes en tirets AC, BD. Les positions correspondantes du point d'application de la charge se déterminent par l'équation (134). Par raison de symétrie, on conclut que ces points sont les angles du losange hachuré sur la figure 231.

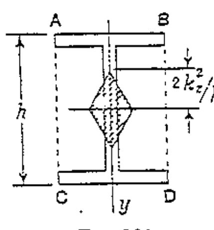


Fig. 231.

Si le point d'application de la charge excentrée se trouve hors du noyau central d'une section, la droite de contrainte nulle correspondante coupe la section et la charge provoque non seulement une compression mais aussi une traction. Prenons, par exemple, une section rectangulaire (fig. 232) dont le point d'application A de la charge se situe sur l'axe principal y, à une distance c du bord de la section. Si c est inférieur à $h/3$, une partie de la section ne travaille pas. On détermine la partie active en supposant que la répartition des efforts de compression sur la section

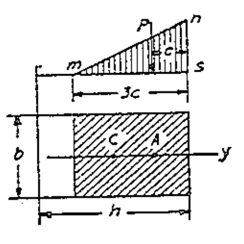


Fig. 232.

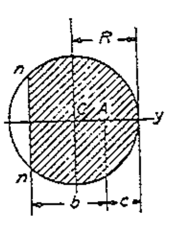


Fig. 233.

est linéaire (représentée sur la figure par mn) et que la résultante de ces efforts est P. Puisque cette résultante passe par le centre de gravité du triangle mns, la dimension ms de la partie active de la section est égale à $3c$.

Dans le cas d'une section circulaire (fig. 233), lorsque l'excentricité CA de la charge est supérieure à $R/4$ et lorsque le matériau ne résiste pas aux contraintes de traction, seule une partie de la section travaille. Soit la droite nn, perpendiculaire à AC, la limite de cette partie. Sa distance b du point A s'obtient d'après les conditions suivantes : les contraintes de compression ne sont pas proportionnelles à la distance y de nn ; la somme des efforts de compression dans la partie active de la section est égale à la charge P ; le moment de ces efforts, par rapport à nn, est égal au moment Pb de la charge P par rapport au même axe. Soit σ_{max} la contrainte de compression maximum, la compression à une distance quelconque y de nn est

$$\sigma = \frac{y\sigma_{max}}{b+c}$$

et les équations déterminant b deviennent

$$\int \frac{y\sigma_{max}}{b+c}\,\mathrm{d}A = P, \qquad \int \frac{y^2\sigma_{max}}{b+c}\,\mathrm{d}A = Pb,$$

d'où

$$b = \frac{I_{nn}}{Q_{nn}}. \qquad (a)$$

Dans cette dernière équation $I_{nn} = \int y^2 \mathrm{d}A$ représente le moment d'inertie, par rapport à nn, de la partie active de la section et $Q_{nn} = \int y\,\mathrm{d}A$ est le moment de la partie active par rapport au même axe. On détermine aisément à l'aide de (a) la position de A, pour toute position connue de nn. Cette même équation sera aussi utilisée pour tout autre type de section, à condition que A se trouve sur l'un des axes principaux (²). Si la charge n'est pas appliquée sur un axe principal, le problème de la détermination de la partie active de la section devient plus compliqué (³).

On simplifie énormément, par la notion de noyau d'une section, le calcul des contraintes de flexion maximums lorsque la flexion ne se situe pas dans un plan principal. Par exemple, sur la figure 230, on suppose que mm est un plan axial de la poutre dans lequel s'exerce un moment fléchissant M, et nn l'axe neutre correspondant qui fait un angle α avec le plan mm (voir p. 219). Soit σ_{max} la contrainte maximum dans le point extrême c et d sa distance à

(²) Dans les cas de sections circulaires et annulaires, importantes pour le calcul des contraintes dans les cheminées, il existe des tables simplifiant considérablement ces calculs. Voir Keck, *Z. Architekt. u. Ing.-Ver.*, p. 627, Hanovre, 1882 ; voir aussi *Z. Ver. deut. Ing.*, p. 1321, 1902 et l'étude de G. Dreyer dans *Bautechnik*, 1925.

(³) On trouvera un certain nombre de calculs relatifs à une section rectangulaire dans les études suivantes : F. Engesser, *Zentr. Bauverwalt*, p. 429, 1919 ; O. Henkel, *ibid.*, p. 447, 1918 ; K. Pohl, *Der Eisenbau*, p. 211, 1918 ; F. K. Esling, *Proc. Inst. Civil Engrs.*, 3ᵉ partie, 1905-1906, Londres.

l'axe neutre nn, la contrainte en un point quelconque, situé à la distance w de nn, est $\sigma = \sigma_{max} w/d$, et le moment de tous les efforts répartis sur la section par rapport à l'axe nn est

$$\int \frac{\sigma_{max} w^2}{d} \, dA = \frac{\sigma_{max}}{d} I_{nn}, \qquad (b)$$

où I_{nn} représente le moment d'inertie de la section par rapport à l'axe nn. Le moment des efforts extérieurs, par rapport au même axe, est $M \sin \alpha$. Egalant cette expression à (b), nous obtenons

$$\sigma_{max} = \frac{Md \sin \alpha}{I_{nn}}. \qquad (c)$$

Cette équation se simplifie grandement en utilisant la propriété du noyau central de la section ([1]). Soit O le point d'intersection du plan mm avec le noyau et r sa distance au centre de gravité de la section. D'après la propriété du noyau il résulte qu'une compression P en O annule la contrainte à l'angle c. Donc, la contrainte de traction produite en c par le moment fléchissant Pr, s'exerçant dans le plan mm, est égale en valeur absolue à la contrainte de compression directe P/A ; ou, en substituant Pr à M dans l'équation (c), nous obtenons

$$\frac{P}{A} = \frac{Prd \sin \alpha}{I_{nn}},$$

d'où l'on tire

$$\frac{d \sin \alpha}{I_{nn}} = \frac{1}{Ar}. \qquad (d)$$

Remplaçant dans (c), il vient

$$\sigma_{max} = \frac{M}{Ar}. \qquad (137)$$

Le produit Ar désigne le *module de section* de la section dans le plan mm. Cette définition concorde avec celle que nous avions donnée précédemment (voir p. 93) et, pour la flexion suivant un plan principal, Ar devient égal à Z.

Problèmes

1. Déterminer le noyau d'une poutre standard I de 600 mm de hauteur, pour laquelle $A = 254$ cm², $I_z = 139\,000$ cm⁴, $k_z = 23{,}4$ cm, $I_y = 4\,670$ cm⁴ $k_y = 4{,}30$ cm. La largeur des ailes est $b = 215$ mm.

Réponse. Le noyau est un losange dont les diagonales sont égales à 365 mm et 34,4 mm.

2. Déterminer le rayon du noyau d'une section annulaire, sachant que $R_o = 25$ cm et $R_i = 20$ cm.

Réponse. Le rayon du noyau est $a = 10{,}25$ cm.

([1]) Voir R. LAND, *Z. Architekt. u. Ingenieurw.*, p. 291, 1897.

3. Déterminer le noyau d'une section en forme de triangle équilatéral.

4. Déterminer le noyau de la section d'un tube mince, carré.

Solution. Soit h l'épaisseur du tube et b le côté de la section carrée, nous avons :

$$I_z = I_y \approx \tfrac{2}{3} hb^3, \qquad k_z^2 = k_y^2 = \tfrac{1}{6} b^2.$$

Le noyau est un carré dont la diagonale a pour longueur

$$d = 2 \frac{k^2}{\frac{1}{2} b} = \frac{2b}{3}.$$

56. Compression excentrée d'un poteau symétrique élancé

En étudiant la flexion d'un poteau élancé soumis à l'action d'une charge excentrée, figure 234, on ne peut plus négliger la flèche δ qui n'est plus faible en comparaison de l'excentricité e. Supposons que l'excentricité se trouve dans un plan de symétrie, la flèche se produit dans le même plan axial xy où s'exerce la charge P ; le moment fléchissant en une section quelconque mn est

$$M = -P(\delta + e - y). \qquad (a)$$

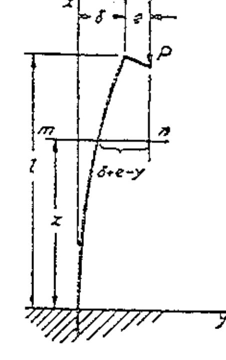


FIG. 234.

En déterminant le signe du moment on remarquera qu'en faisant tourner la figure 234 d'un angle $\pi/2$, dans le sens des aiguilles d'une montre, on obtient mêmes directions des axes de coordonnées que celles utilisées pour le calcul de l'équation (79). Donc, pour obéir à la règle de la figure 63b, le moment (a) est précédé d'un signe moins puisque la ligne élastique est concave dans la direction positive de l'axe y. L'équation différentielle de la ligne élastique obtenue en substituant (a) dans l'équation (79) est

$$EI_z \frac{d^2 y}{dx^2} = P(\delta + e - y). \qquad (b)$$

Utilisons la notation

$$\frac{P}{EI_z} = p^2, \qquad (138)$$

nous obtenons par l'équation (b)

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + p^2 y = p^2(\delta + e). \qquad (c)$$

Par substitution on démontre aisément que

$$y = C_1 \sin px + C_2 \cos px + \delta + e \qquad (d)$$

est solution de l'équation (c). Cette solution comporte deux constantes d'intégration, C_1 et C_2, dont les valeurs sont déterminées de manière à satisfaire aux conditions aux extrémités du poteau, afin d'obtenir la ligne élastique réelle du poteau. A l'extrémité inférieure encastrée les conditions sont :

$$(y)_{x=0} = 0\,, \qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = 0\,. \qquad (e)$$

A l'aide de ces conditions, de l'expression (d) et de sa dérivée première, nous obtenons :

$$C_1 = 0\,, \qquad C_2 = -(\delta + e)\,.$$

L'équation de la ligne élastique (d) devient donc

$$y = (\delta + e)(1 - \cos px)\,. \qquad (f)$$

Pour obtenir la valeur de la flèche δ à l'extrémité supérieure du poteau, nous substituons $x = l$ dans le second membre de l'équation (f). La flèche y est alors égale à δ et l'on obtient l'équation :

$$\delta = (\delta + e)(1 - \cos pl)\,,$$

d'où

$$\delta = \frac{e(1 - \cos pl)}{\cos pl}\,. \qquad (139)$$

Substituons cette valeur dans (f), nous obtenons la ligne élastique

$$y = \frac{e(1 - \cos px)}{\cos pl}\,. \qquad (140)$$

On calcule aisément, par cette équation, la flèche en une section quelconque de la barre.

Dans le cas d'un poteau court, étudié au paragraphe 54, le produit pl est petit en comparaison de l'unité et il suffit de prendre

$$\cos pl \approx 1 - \tfrac{1}{2} p^2 l^2\,. \qquad (g)$$

Utilisons cette valeur de cos pl et négligeons la quantité $p^2l^2/2$ au dénominateur de l'expression (139), comme infiniment petite devant l'unité, nous trouvons

$$\delta = \frac{ep^2l^2}{2} = \frac{Pel^2}{2\,EI_z}\,. \qquad (h)$$

Cette équation représente la valeur de la flèche à l'extrémité d'une cantilever fléchie par un couple Pe appliqué à son extrémité libre. Par suite, l'emploi de l'expression approchée (g) revient à négliger l'influence des flèches sur la valeur du moment fléchissant et à prendre, au contraire, un moment constant égal à Pe.

Lorsque pl est grand, comme c'est souvent le cas pour un poteau élancé, on utilise l'expression (139) pour calculer δ. On trouve alors que la flèche n'est plus proportionnelle à la charge P. Au contraire, elle augmente plus rapidement que P, comme on le constate par la lecture des valeurs de cette flèche dans la seconde rangée du tableau 2.

TABLEAU 2. — FLÈCHES PRODUITES PAR UNE CHARGE LONGITUDINALE EXCENTRÉE

pl	0,1	0,5	1,0	1,5	$\pi/2$
δ	0,005e	0,139e	0,851e	13,1e	∞
δ approchée	0,005e	0,139e	0,840e	12,8e	∞
sec pl	1,005	1,140	1,867	13,2	∞
P/P_{cr}	0,004	0,101	0,405	0,911	1

Le moment fléchissant maximum se produit à l'extrémité encastrée du poteau et a pour valeur :

$$M_{max} = P(e + \delta) = Pe \sec pl\,. \qquad (141)$$

La quatrième ligne du tableau ci-dessus donne une série de valeurs de sec pl. Leur examen montre la croissance rapide du moment lorsque pl tend vers $\pi/2$. On étudiera ce phénomène au prochain paragraphe.

Nous tenons toutefois à répéter ici qu'il n'y a pas, dans le cas considéré, proportionnalité entre la valeur de l'effort de compression et la flèche δ qu'il produit. Donc, on ne peut utiliser la méthode de superposition (p. 156). Un effort P, appliqué axialement, ne produit qu'une compression de la barre, mais lorsque le même effort s'exerce conjointement avec un couple fléchissant, Pe, il provoque non seulement une compression mais aussi une flexion supplémentaire, si bien que la déformation résultante ne peut s'obtenir par simple superposition d'une compression axiale due à P et d'une flexion due au couple Pe. La raison pour laquelle la méthode de superposition ne s'applique pas dans ce cas est évidente si l'on compare ce problème avec celui de la flexion d'une poutre soumise

à des charges transversales. Dans ce dernier cas, on admet que les faibles flèches de la poutre ne modifient pas les distances entre les efforts et que les moments fléchissants se calculent sans tenir compte de la flèche de la poutre. Dans le cas de la compression excentrée d'un poteau les flèches produites par le couple Pe transforment totalement le caractère de l'action de la charge axiale en lui conférant un effet de flexion et de compression. A chaque fois que la déformation produite par une charge modifie l'action d'une autre charge, il ne sera pas possible de déterminer la déformation finale par la méthode de superposition.

Dans l'étude antérieure nous avions considéré la flexion dans un plan de symétrie du poteau. Lorsque le poteau possède deux plans de symétrie et que l'excentricité e n'est pas dirigée suivant l'un des axes principaux de la section, il faut décomposer le couple fléchissant Pe suivant deux couples composants s'exerçant chacun dans un plan de symétrie du poteau. On détermine alors la flèche dans chacun des plans de symétrie de la même manière que précédemment.

On peut appliquer l'étude de la flexion d'un poteau encastré à une extrémité au mât, figure 235, comprimé excentriquement par deux forces égales et opposées. En raison de la symétrie on conclut que la section médiane A ne subit pas de rotation pendant la flexion et chaque moitié de mât de la figure 235 se trouve dans les mêmes conditions que le poteau de la figure 234. Donc, la flèche et le moment fléchissant maximum s'obtiennent en substituant $l/2$ à l dans les équations (139) et (141). Nous avons, dans ce cas,

FIG. 235.

$$\delta = \frac{e\,(1-\cos \frac{1}{2}pl)}{\cos \frac{1}{2}pl}, \tag{142}$$

$$M_{max} = Pe \sec \tfrac{1}{2}pl, \tag{143}$$

l'équation de la contrainte de compression maximum devient

$$\sigma_{max} = \frac{P}{A} + \frac{Pe}{Z}\sec\frac{pl}{2},$$

où Z représente le module de section.

Problèmes

1. Calculer la flèche au milieu et les contraintes maximums de traction et compression dans un mât d'acier en compression excentrée. Il mesure 3,05 m de long, ses extrémités sont articulées et sa section représente un profilé en ⊔ de 200 mm de hauteur, $I_z = 54{,}08$ cm^4, $I_y = 1\,343{,}68$ cm^4, $A = 21{,}67$ cm^2, la largeur des ailes est 57 mm. La distance séparant le centre de gravité du dos du profilé est 14,7 mm et l'effort de compression $P = 18{,}14$ kN s'exerce dans le plan du dos du profilé ⊔ et dans son plan de symétrie.

Réponse. $\delta = 3{,}2$ mm, $\sigma_{max} = 173$ bars en traction, $\sigma_{min} = 172{,}3$ bars en compression.

2. Une barre carrée en acier de 50×50 mm et 1,83 m de long est soumise à une compression excentrée due aux efforts $P = 4\,540$ N. L'excentricité e est dirigée suivant une diagonale du carré et est égale à 25 mm. Calculer la contrainte de compression maximum, en supposant que les extrémités de la barre sont articulées.

Réponse. $\sigma = 93{,}5$ bars.

3. Une barre d'acier de 1,22 m de long, à section rectangulaire 25×50 mm, est comprimée par deux efforts, $P = 4\,540$ N, appliqués aux angles des sections extrêmes, de sorte que l'excentricité, dirigée suivant une diagonale de la section, est égale à la moitié de la longueur de cette diagonale. En supposant les extrémités articulées, trouver la contrainte de compression maximum.

Réponse. $\sigma = 254$ bars.

57. Charge critique

Nous avons indiqué, au paragraphe précédent, que la flèche d'un poteau en compression excentrée croît très rapidement lorsque le produit pl, équation (139), tend vers $\pi/2$. Lorsque pl est égal à $\pi/2$, les formules (139) des flèches et (141) du moment fléchissant maximum deviennent infinies. On utilise l'expression (138) pour déterminer la valeur de la charge correspondante. Substituons $p = \pi/2l$ dans cette expression, nous trouvons que la valeur de la charge, pour laquelle (139) et (141) tendent vers l'infini, est

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_z}{4\,l^2}. \tag{144}$$

Cette valeur, qui ne dépend que des dimensions du poteau et du module du matériau, s'appelle *charge critique* ou charge d'Euler, en souvenir de

celui qui fut le premier à calculer cette valeur dans son étude célèbre des courbes élastiques [5]. Pour définir plus clairement la signification physique de cette charge, traçons les courbes représentatives de la relation entre la charge P et la flèche δ, extraite de l'expression (139). Nous avons représenté sur la figure 236 plusieurs courbes de ce type établies pour différentes valeurs du rapport d'excentricité e/k_z. Les valeurs du rapport δ/k_z sont portées en abscisses tandis que les ordonnées représentent le rapport P/P_{cr}, c'est-à-dire, les valeurs du rapport de la charge effective à sa valeur critique définie par l'équation (144).

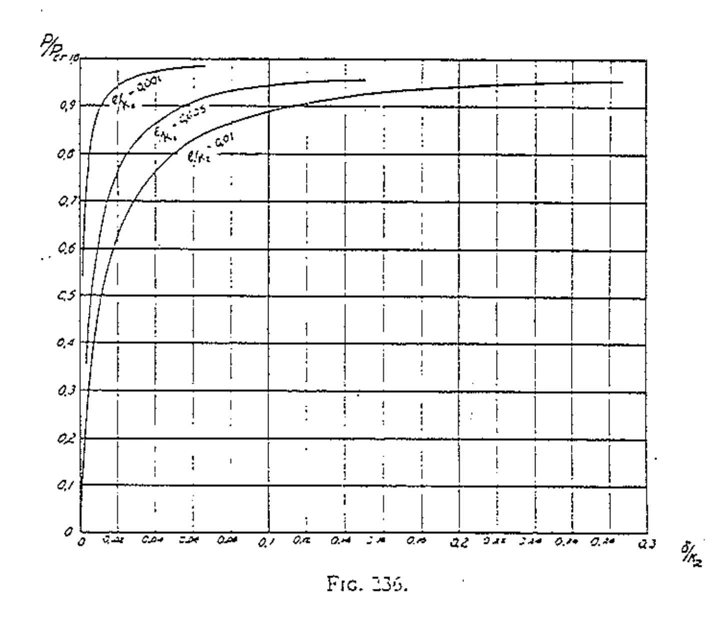


FIG. 236.

On voit, d'après ces courbes, que les flèches δ deviennent de plus en plus faibles et les courbes de plus en plus serrées sur l'axe vertical lorsque l'excentricité e décroît. En même temps, les flèches croissent rapidement lorsque la charge P tend vers sa valeur critique (144) et toutes les courbes ont pour asymptote commune l'horizontale $P/P_{cr} = 1$.

L'équation différentielle (79) de la ligne élastique, utilisée dans l'étude du paragraphe précédent, a été calculée en supposant que les flèches sont faibles en comparaison de la longueur l du poteau. Par suite, la formule (139) de la flèche δ ne fournit pas un résultat exact lorsque P

[5] *Loc. cit.*, p. 319.

est très voisin de P_{cr}. Toutefois, les courbes de la figure 236 indiquent que, aussi petite que puisse être l'excentricité e, de très importantes flèches se produisent lorsque la charge P est suffisamment voisine de sa valeur critique. Si la flèche augmente, le moment fléchissant à l'extrémité encastrée et les contraintes augmentent aussi.

Les expériences relatives à la compression des poteaux montrent que même en prenant toutes les précautions possibles pour appliquer la charge au centre, il existe toujours de faibles excentricités inévitables. Par suite, dans ces expériences, la charge P produit non seulement une compression mais aussi une flexion. Les courbes de la figure 237 indiquent

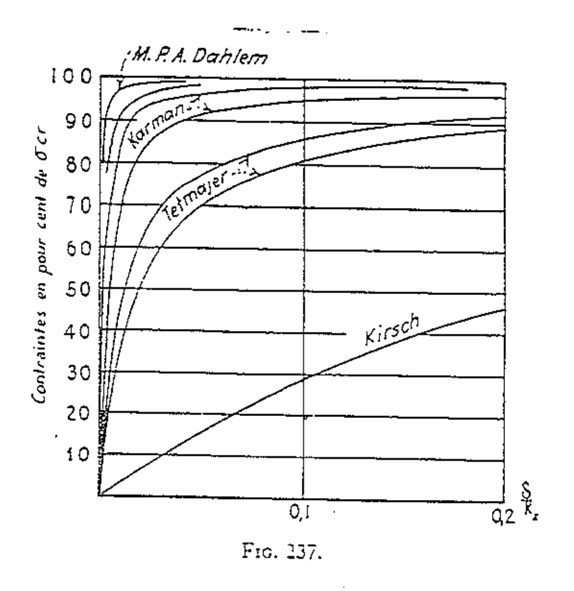


FIG. 237.

les résultats obtenus, pour ce type d'expériences, par différents physiciens. On remarque qu'avec l'accroissement de la précision dans l'application de la charge, les courbes tendent de plus en plus vers l'axe vertical et que l'accroissement rapide de la flèche devient de plus en plus prononcé, lorsque la charge approche de sa valeur critique. Les charges P proches de leurs valeurs critiques produisent toujours de grandes déformations qui conduisent généralement à une dépassement de la limite élastique du matériau, si bien qu'après une telle sollicitation le poteau perd toute utilité pratique. Ceci prouve que la valeur critique de la charge, donnée par l'équation (144), doit être considérée comme la *charge limite* qui provoque le périssement complet du poteau. Dans les applications pra-

tiques la charge admissible, inférieure à la charge critique, s'obtient en divisant la valeur critique de la charge par un certain coefficient de sécurité. Les paragraphes 58 et 59 donnent une étude plus détaillée de cette question.

Dans l'étude précédente, nous avons considéré un poteau dont une extrémité est encastrée et l'autre libre. On aboutit à des conclusions analogues dans le cas d'un mât articulé aux deux extrémités (fig. 235). Les équations (142) et (143) deviennent infinies lorsque

$$\frac{pl}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Remplaçons p par sa valeur tirée de (138), nous obtenons

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_z}{l^2}. \tag{145}$$

C'est la *valeur critique* de l'effort de compression pour un mât à extrémités articulées.

Dans le cas de la compression des poteaux à extrémités encastrées, la forme de la flèche est celle indiquée sur la figure 238. On peut considérer la ligne élastique comme composée de quatre parties dont chacune est analogue à la courbe obtenue pour un poteau ayant une extrémité encastrée et l'autre libre. On détermine alors la valeur critique de la charge en substituant $l/4$ à l dans l'équation (144), ce qui donne

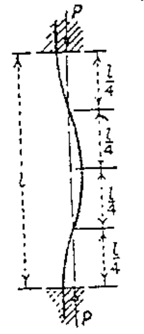


Fig. 238.

$$P_{cr} = \frac{4\pi^2 EI_z}{l^2}. \tag{146}$$

C'est la *charge critique* d'un poteau à extrémités encastrées.

On notera que lors du calcul de (139) on a supposé que l'excentricité était dirigée suivant l'axe y et que celui-ci était axe de symétrie. Si le poteau possède deux plans de symétrie, on obtient des formules identiques pour une excentricité initiale dirigée suivant l'axe z. La flexion se produit alors dans le plan xz et, pour calculer les flèches, on substitue I_y à I_z dans (139). Lorsqu'on essaie d'appliquer la charge au centre et que la flexion se produit tout de même sous l'effet de faibles excentricités inévitables, il faut considérer les flèches à la fois dans le plan xy et le plan xz ; on utilise, pour calculer la valeur critique de la charge, le plus petit des deux moments d'inertie principaux dans les équations (144), (145) et (146). Dans l'étude suivante, on suppose que I_z est le plus petit moment d'inertie principal et k_z le rayon de giration correspondant.

Il est parfois avantageux, lors du calcul des flèches, d'utiliser des formules approchées au lieu des formules exactes (139) et (142). Nous avons vu, au paragraphe précédent (p. 247) que pour de faibles charges, c'est-à-dire lorsque pl est petit, inférieur à 1/10 par exemple, la flèche s'obtient, avec une exactitude satisfaisante, par l'équation :

$$\delta = \frac{Pel^2}{2\,EI_z}, \tag{a}$$

où l'on néglige l'influence de l'effort longitudinal sur la flexion et où l'on admet que le moment fléchissant Pe est constant. Pour des charges importantes, l'équation (a) n'est plus suffisamment exacte, et il faut tenir compte de l'effort de compression sur la flexion. Cette influence dépend principalement du rapport P/P_{cr} et l'on détermine la flèche, avec une exactitude satisfaisante, à l'aide de la formule :

$$\delta = \frac{Pel^2}{2\,EI_z} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{P}{P_{cr}}}. \tag{b}$$

Les flèches obtenues par cette formule sont données à la 3[e] ligne du tableau 2, page 249. La comparaison de ces résultats à ceux de la 2[e] ligne du même tableau montre que la formule (b) est toujours suffisamment exacte jusqu'au voisinage de la valeur critique de la charge.

Une formule approchée analogue, pour la flèche d'un mât à extrémités articulées, est (⁵)

$$\delta = \frac{Pel^2}{8\,EI_z} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{P}{P_{cr}}}. \tag{c}$$

Le premier facteur du second membre représente la flèche due aux deux couples Pe appliqués aux extrémités. Le second facteur représente l'influence de l'effort de compression longitudinal P sur la flèche.

L'équation (c) s'avère utile à la détermination de la charge critique dans le cas de l'expérience réalisée avec un mât comprimé. Si l'on traduit graphiquement les résultats obtenus par une courbe du genre de celles de la figure 237, on doit tracer l'asymptote horizontale à cette courbe pour déterminer P_{cr}. Cette opération ne peut pas s'effectuer avec une

(5) Cette formule approchée est donnée par T. Young dans son ouvrage célèbre, *A Course of Lectures on Natural Philosophy and the Mechanical Arts*, Londres, 1807.

grande précision, spécialement lorsque les excentricités inévitables ne sont pas très petites et que la courbe n'accuse pas une déviation très prononcée en tendant vers l'asymptote horizontale. On obtient une détermination plus satisfaisante de P_{cr} par l'équation (c). Divisons cette dernière par P/P_{cr}, nous avons

$$\frac{\delta}{P} \cdot P_{cr} = \frac{e\pi^2}{8} \frac{1}{1 - \dfrac{P}{P_{cr}}}$$

et

$$\frac{\delta}{P} \cdot P_{cr} - \delta = \frac{e\pi^2}{8}.$$

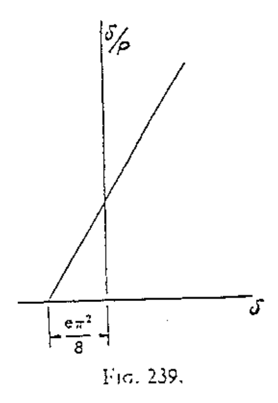


FIG. 239.

Cette équation montre que si l'on représente graphiquement δ/P en fonction de δ, mesuré pendant l'expérience, nous obtenons la demi-droite de la figure 239. Celle-ci rencontre l'axe horizontal ($\delta/P = 0$) à la distance $e\pi^2/8$ de l'origine, et l'inverse de la pente de cette demi-droite donne la charge critique [7].

58. Contrainte critique

Calculs des poteaux. Considérons une béquille à extrémités articulées, on détermine la contrainte critique en divisant la charge critique, extraite de l'équation (145), par l'aire A de la section. Nous trouvons alors

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 E}{(l/k_z)^2}. \tag{147}$$

On constate que pour un matériau déterminé la valeur de la contrainte critique dépend du rapport l/k_z, appelé *coefficient d'élancement*. Sur la figure 240 la courbe ACB représente [8] la relation entre σ_{cr} et l/k_z dans le cas où $E = 21 \times 10^5$ bars pour l'acier. On remarquera que cette courbe est entièrement définie par la valeur du module du matériau et qu'elle est indépendante de sa résistance à la rupture.

Pour les grandes valeurs du coefficient d'élancement l/k_z la contrainte critique décroît, ce qui indique qu'une béquille très élancée flambe latéralement et perd sa résistance pour une très faible contrainte de compression. On ne peut améliorer cette condition en utilisant un acier de résistance plus élevée, en effet le module de l'acier ne varie pas beaucoup avec l'alliage et le traitement thermique, il reste donc pratiquement constant. On peut renforcer la béquille en augmentant le moment d'inertie I_z et le rayon de giration k_z ; on y arrive fréquemment en disposant la matière de la béquille aussi loin que possible de l'axe neutre, ceci sans accroissement de l'aire de la section. Donc, les poteaux à section tubulaire sont plus économiques que les poteaux à section pleine. Lorsque l'élancement diminue la contrainte critique augmente et la courbe ACB tend asymptotiquement vers l'axe vertical. Toutefois, il existe une certaine limitation quant à l'utilisation de la courbe d'Euler pour les poteaux courts. Le calcul de l'expression de la charge critique est fondé sur l'utilisation de l'équation différentielle (79) de la ligne élastique, laquelle suppose que le matériau est parfaitement élastique et obéit à la loi de Hooke (voir § 31). Par suite, la courbe ACB (fig. 240) ne donne des résultats satisfaisants que dans le cas de barres relativement élancées pour lesquelles σ_{cr} reste à l'intérieur du domaine élastique du matériau. Dans le cas de béquilles courtes, pour lesquelles σ_{cr}, déterminé par (147), est supérieur à la limite de proportionnalité du matériau, la courbe d'Euler ne donne pas de résultats satisfaisants et l'on doit recourir à l'expérimentation sur le flambement des béquilles comprimées au-delà de la limite de proportionnalité. Ces expériences démontrent que les béquilles composées par des matériaux, tel l'acier de construction, à limite d'allongement prononcé, perdent toute leur stabilité et flambent latéralement lorsque

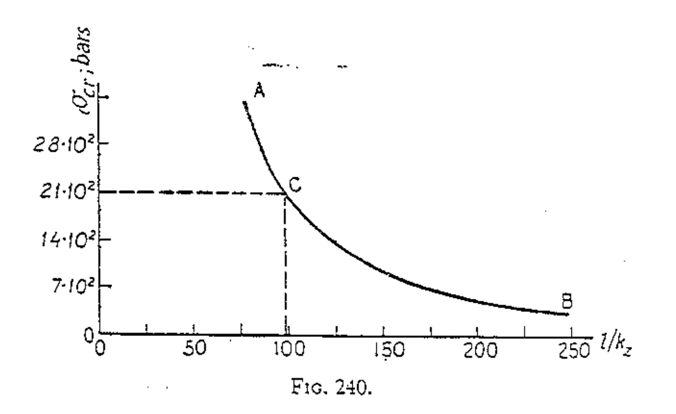


FIG. 240.

[7] Cette méthode, suggérée par R. V. SOUTHWELL, *Proc. Roy. Soc. (London) A*, vol. 135, p. 601, 1932, s'est révélée très intéressante et actuellement on l'utilise largement lors des essais sur poteaux.

[8] Cette courbe est quelquefois désignée sous le nom de *courbe d'Euler*, puisqu'elle dérive de la formule de la charge critique.

la contrainte de compression devient égale à la contrainte de limite d'allongement. La figure 241 représente quelques résultats expérimentaux. Le matériau utilisé est de l'acier de construction à limite d'allongement très prononcé, $\sigma_{Y.P.} = 32$ hectobars. On remarque que pour des béquilles à élancement relativement grand ($l/k_z > 80$) les valeurs expérimentales des contraintes critiques coïncident de manière satisfaisante avec la courbe

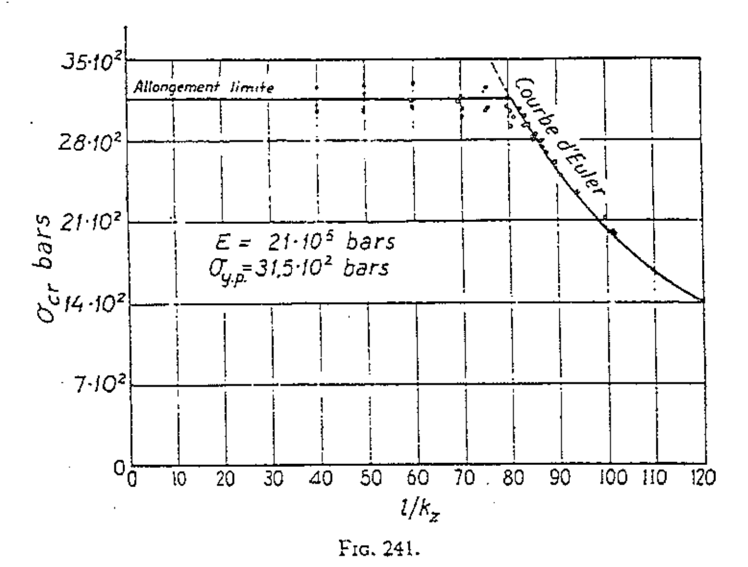


Fig. 241.

d'Euler, tandis que pour les plus courtes la contrainte critique reste pratiquement indépendante du coefficient d'élancement l/k_z et est égale à la limite d'allongement.

Dans le cas d'un acier de construction ordinaire à faible teneur en carbone la limite d'allongement n'est pas aussi prononcée que dans l'exemple précédent et elle apparaît pour une contrainte très inférieure. Pour cette catégorie d'acier nous pouvons prendre $\sigma_{Y.P.} = 22$ hectobars. La limite de proportionnalité est aussi plus basse, si bien que la courbe d'Euler n'est satisfaisante que pour des coefficients d'élancement supérieurs à $l/k_z = 100$, qui correspond à la contrainte de compression $\sigma_{cr} = 21$ hectobars. Pour des contraintes supérieures, c'est-à-dire pour $l/k_z < 100$, le matériau n'obéit plus à la loi de Hooke et la courbe d'Euler devient inutile. On la remplace généralement, dans la région non élastique, par deux segments de droites AB et BC (voir fig. 242). Le segment AB correspond à la limite d'allongement et l'on prend le segment oblique

BC pour les contraintes comprises entre la limite de proportionnalité et la limite d'allongement du matériau.

A l'aide du diagramme $ABCD$ (fig. 242) tracé pour un acier de construction ordinaire, on détermine aisément la contrainte critique d'une béquille en acier de dimensions quelconques. Il suffit de calculer dans chaque cas particulier la valeur du coefficient d'élancement l/k_z et de prendre l'ordonnée correspondante de la courbe. Pour obtenir la contrainte de sécurité relative à la béquille, on divise la contrainte critique

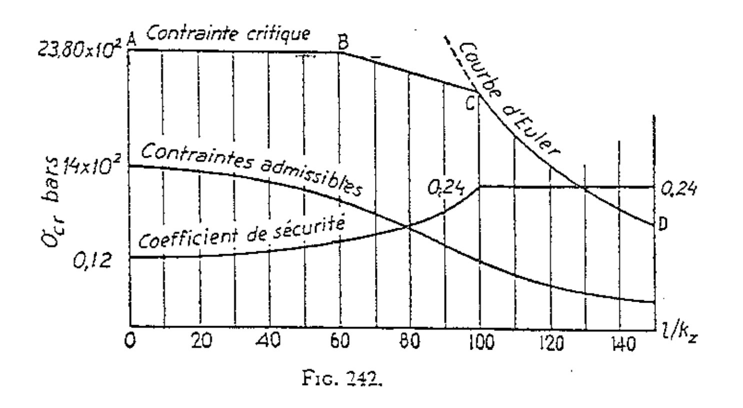


Fig. 242.

par un coefficient de sécurité convenablement choisi. Pour le choix de ce coefficient, on devra considérer que, lorsque le coefficient d'élancement croît, diverses imperfections telles qu'un voilement initial du poteau ont tendance à augmenter. Il semble donc logique d'introduire un coefficient de sécurité variable qui croît avec le coefficient d'élancement. Dans certaines réglementations le coefficient de sécurité augmente de 1,7 pour $l/k_z = 0$ à 3,5 pour $l/k_z = 100$. Il varie de telle sorte que la contrainte admissible suit une loi parabolique dans le domaine non élastique. Pour $l/k_z > 100$, le coefficient de sécurité est pris constant et égal à 3,5 ; les contraintes admissibles se calculent à l'aide de la courbe d'Euler. Sur la figure 242 on a représenté les courbes de la contrainte admissible et du coefficient de sécurité en fonction de l'élancement pour un acier de construction.

Dans l'étude précédente, nous avons considéré une béquille à extrémités articulées. Ce cas est parfois appelé *cas fondamental* du flambement des béquilles du fait qu'on le rencontre très souvent dans le calcul des membrures comprimées des treillis à nœuds articulés. Les contraintes

admissibles établies par le diagramme de la figure 242, du cas fondamental, peuvent être utilisées dans d'autres cas à condition de prendre, à la place de la longueur réelle du poteau, une *longueur réduite* dépendant des conditions qui règnent aux extrémités du poteau. Considérons, par exemple, le cas d'un poteau dont une extrémité est encastrée et l'autre libre (voir p. 247), et aussi le cas d'un poteau à extrémités encastrées (voir p. 254) ; les formules correspondantes des charges critiques s'écrivent respectivement :

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_z}{(2\,l)^2} \qquad \text{et} \qquad P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_z}{(\frac{1}{2}l)^2}.$$

Comparons-les à l'équation (145) du cas fondamental, on conclut que dans le calcul d'un poteau ayant une extrémité encastrée et l'autre libre, il faut prendre une longueur double de la longueur réelle de la colonne si l'on se sert du diagramme de la figure 242. Par contre, pour un poteau à extrémités encastrées la longueur réduite est égale à la moitié de la longueur réelle.

Le choix des dimensions adéquates de la section d'un poteau se fait généralement par approximations successives. Connaissant la charge P qui s'exerce sur le poteau, on choisit certaines dimensions pour la section et l'on calcule k_z et l/k_z pour ces dimensions. Ensuite, on obtient la valeur de compression de sécurité par le diagramme de la figure 242. Multiplions cette valeur par l'aire de la section choisie, on détermine la charge de sécurité sur le poteau. Si cette charge n'est ni inférieure, ni trop supérieure à P, la section choisie convient. Autrement, on recommencera les calculs. Dans le cas de poteaux composés, on calcule k_z à l'aide de la section brute puisque les trous de rivets n'affectent pas d'une manière appréciable la valeur de la charge critique. Toutefois, pour calculer la charge de sécurité sur le poteau on multiplie la contrainte de sécurité par l'aire de la section nette, afin de se garantir contre les contraintes excessives dans le poteau.

Problèmes

1. Une barre d'acier de section rectangulaire 25×50 mm, à extrémités articulées, subit une compression axiale. Déterminer la longueur minimum pour laquelle l'équation (147) de la contrainte critique est applicable lorsque la limite de proportionnalité du matériau est 21 hectobars et $E = 21\times10^3$ hectobars. Déterminer la contrainte critique sachant que la barre mesure 1,50 m de long.

Réponse. Longueur minimum = 0,717 m. La contrainte critique pour $l = 1{,}50$ m est 4,8 hectobars.

2. Résoudre le problème en supposant que la barre a une section de 25 mm de diamètre et est encastrée à ses extrémités.

3. Déterminer la contrainte de compression critique d'un profilé I standard, mesurant 1,80 m de long et articulé aux extrémités, $I_z = 74{,}9$ cm⁴, $I_y = 907$ cm⁴ et $A = 23{,}3$ cm². Déterminer la charge de sécurité à partir de la courbe de la figure 242.

Réponse. $\sigma_{cr} = 1\,995$ bars, $l/k_z = 102$, charge de sécurité = 2 058 bars.

4. Résoudre le problème précédent en supposant que les extrémités du poteau sont encastrées. Utiliser la figure 242.

Réponse. $\sigma_{cr} = 2\,380$ bars, coefficient de sécurité = 2, charge de sécurité = 4 270 bars.

5. Calculer à l'aide de la figure 242 la charge de sécurité d'une membrure (fig. 243) composée de deux poutrelles I ayant même section que celle du problème 3. La longueur de la membrure est 3 m et ses extrémités sont encastrées. On suppose que les éléments d'assemblage sont si rigides que les poutrelles I travaillent simultanément comme une barre unique.

z
y
10cm

Fig. 243.

Solution. $I_z = 2\times907 = 1\,814$ cm⁴, $I_y = 2[74{,}9+23{,}3(5)^2] = 1\,337{,}8$ cm⁴. Donc, la plus grande valeur du coefficient d'élancement est

$$\frac{l}{k_y} = \frac{300}{\sqrt{\dfrac{1\,337{,}8}{2\times23{,}3}}} = 53{,}3$$

d'après la figure 242 la compression admissible est 1 120 bars, charge de sécurité = 1 120×2×23,3 = 52 192 daN.

6. Résoudre le problème précédent en supposant que les extrémités de la membrure sont articulées.

7. Un poteau de 3 m de long, à extrémités articulées, est composé de deux profilés ⊔ de 200 mm de hauteur avec $I_z = 50{,}78$ cm⁴, $I_y = 1\,261{,}7$ cm⁴, $A = 21$ cm² et $c = 14{,}5$ mm, c représente la distance entre le centre de gravité et le dos du profilé ⊔. Calculer la charge de sécurité sur le poteau lorsque la distance séparant le dos des profilés est égale à 10 cm.

8. Déterminer l'aire de section nécessaire d'une béquille carrée en acier de 1,80 m de long supportant une charge $P = 200$ kN et articulée à ses extrémités. Utiliser la figure 242.

9. Résoudre le problème précédent en supposant que les extrémités de la béquille sont encastrées.

59. Calcul des poteaux sur la base d'erreurs admissibles

Nous avons déterminé, au paragraphe précédent, la charge de sécurité sur un poteau en divisant la charge critique du poteau par un coefficient adéquat. La faiblesse de cette méthode réside dans la façon arbitraire de choisir le coefficient de sécurité qui, nous l'avons vu, varie avec le coefficient d'élancement. Afin de rendre le procédé de calcul des poteaux plus rationnel, on a développé une autre méthode fondée sur les erreurs admissibles (⁹). Sur la base de données expérimentales réelles on admet certaines valeurs pour la grandeur de l'excentricité inévitable e de l'effort de compression P. Par suite, en utilisant ces valeurs dans les formules du paragraphe 56, on calcule $P_{Y.P.}$ de la charge pour laquelle la contrainte maximum dans la béquille comprimée devient égale à la contrainte d'allongement limite du matériau. On détermine alors la charge de sécurité en divisant $P_{Y.P.}$ par un coefficient de sécurité convenable. Donc, au lieu d'employer la charge critique, qui équivaut à la charge de rupture, on utilise, comme base de calcul de la charge de sécurité, la charge pour laquelle commence le fluage.

Cette méthode de calcul des poteaux est simplifiable par l'emploi de diagrammes suivant le procédé que nous développons ci-dessous. Considérons le cas d'une béquille à extrémités articulées (fig. 235), on calcule le moment fléchissant maximum par l'équation (143) et la contrainte de compression maximum est

$$\sigma_{max} = \frac{P}{A} + \frac{Pe}{Z} \sec \sqrt{\frac{P}{EI_z}} \frac{l}{2}. \qquad (a)$$

Le premier terme du second membre représente la contrainte directe et le deuxième la contrainte de compression maximum due à la flexion. La charge pour laquelle commence le fluage s'obtient en remplaçant dans cette équation σ_{max} par $\sigma_{Y.P.}$ - ce qui donne

$$\sigma_{Y.P.} = \frac{P_{Y.P.}}{A}\left(1 + \frac{e}{r} \sec \frac{l}{2k_z}\sqrt{\frac{P_{Y.P.}}{EA}}\right), \qquad (b)$$

où l'on utilise la notation $r = Z/A$ pour le rayon du noyau de la section (voir p. 243) et $k_z = \sqrt{I_z/A}$ pour le plus petit rayon de giration. Le rapport $P_{Y.P.}/A$ est la contrainte de compression moyenne ou *contrainte de compression centrale* pour laquelle commence le fluage. Soit σ_c cette contrainte, nous obtenons

$$\sigma_{Y.P.} = \sigma_c\left(1 + \frac{e}{r} \sec \frac{l}{2k_z}\sqrt{\frac{\sigma_c}{E}}\right). \qquad (c)$$

A partir de cette relation et pour une valeur donnée du coefficient d'excentricité e/r, nous obtenons σ_c pour une valeur quelconque d'élancement l/k_z. Les résultats de ces calculs, pour un acier de construction dont $\sigma_{Y.P.} = 25{,}2$ hectobars, sont représentés par les courbes de la figure 244. A l'aide de ces courbes on calcule aisément la contrainte de compression moyenne σ_c et la charge compressive $P_{Y.P.} = A\sigma_c$, pour laquelle le fluage commence, si l'on connaît e/r et l/k_z. On détermine enfin la charge de sécurité en divisant $P_{Y.P.}$ par le facteur de sécurité.

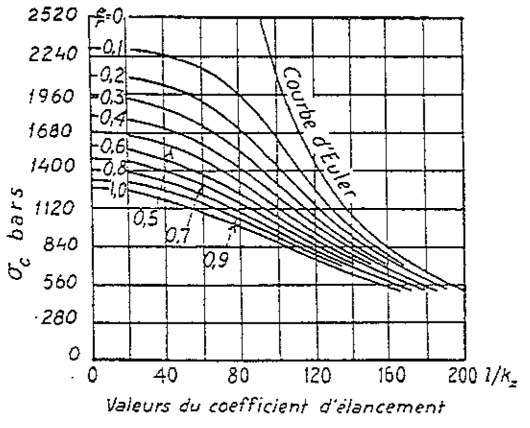


FIG. 244.

Nous avons supposé dans l'étude précédente que les imperfections inévitables du poteau peuvent être représentées par une excentricité de la charge. D'une manière analogue nous pouvons aussi considérer que ces imperfections sont équivalentes à un voilement initial de la colonne. Soit a la déviation maximum initiale de l'axe du poteau par rapport à la verticale (¹⁰), on obtient des courbes identiques à celles de la figure 244 et représentant σ_c en fonction du rapport a/r et de l'élancement l/k_z.

En pratique, on suppose que la flèche initiale a représente une certaine fraction de la longueur l du poteau. Prenons une certaine valeur pour ce

(⁹) Voir D. H. YOUNG, *Proc. Am. Soc. Civil Engrs.*, déc. 1934 ; voir aussi H. K. STEPHENSON et K. CLONINGER, JR., *Texas Eng. Exp. Sta. Bull. No. 129*, 1953.

(¹⁰) On représente généralement le voilement initial du poteau par la demi-onde d'une courbe sinusoïdale.

rapport [11], on détermine a et σ_c par les courbes ci-dessus. La figure 245 représente les résultats obtenus ainsi pour trois valeurs différentes de a/l et pour $\sigma_{Y.P.} = 25{,}2$ hectobars dans le cas d'un profilé I. Dans le cas de poteaux très courts les trois courbes donnent $\sigma_c = 25{,}2$ hectobars. Pour les poteaux très élancés les valeurs données par les courbes tendent vers celles obtenues par la courbe d'Euler. Utilisons l'une des courbes et divisons σ_c de cette courbe par un coefficient de sécurité convenable.

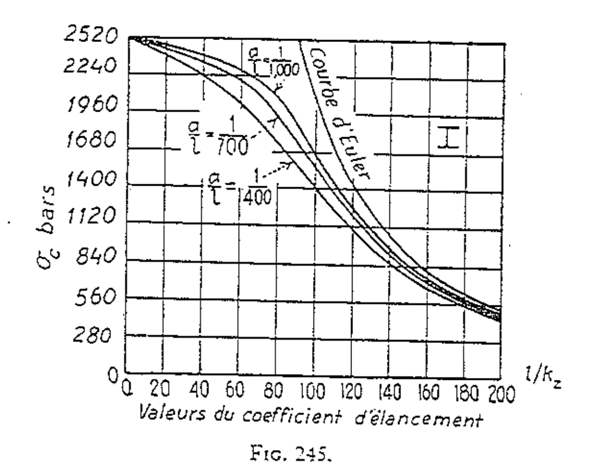


FIG. 245.

2 par exemple, on détermine alors la valeur de sécurité de la contrainte de compression moyenne. L'avantage de cette méthode est qu'elle emploie un coefficient de sécurité constant, puisque l'accroissement des erreurs avec la longueur l du poteau est pris en considération en supposant que l'excentricité est proportionnelle à cette longueur. Toutefois, l'importance des erreurs à considérer reste, dans une certaine mesure, indéfinie et dépend des données expérimentales existantes.

60. Formules empiriques pour le calcul des poteaux

Les deux méthodes de calcul des poteaux, développées dans les deux derniers paragraphes et fondées sur des considérations théoriques, comportent certaines indéterminations, comme un coefficient de sécurité variable dans le procédé de calcul illustré par la figure 242 ou les erreurs

(11) On prend généralement $l/400 \geqslant a \geqslant l/1\,000$.

admissibles utilisées dans la détermination des courbes de la figure 245. Ces quantités ne peuvent être choisies que sur la base d'expériences effectuées sur des poteaux réels. Il est naturel que dans ces conditions plusieurs ingénieurs préfèrent utiliser directement les résultats expérimentaux exprimés par des formules empiriques. Ce procédé est tout à fait légitime tant que l'application de ces formules reste à l'intérieur des limites pour lesquelles elles ont été établies et pour lesquelles il existe une documentation expérimentale suffisante. Néanmoins, à chaque fois qu'il devient nécessaire de sortir du cadre de ces limites, les formules seront modifiées en conséquence. Dans cette tâche, les considérations théoriques deviennent primordiales.

L'une des plus vieilles formules empiriques est due à TREDGOLD [12]. Elle fut adaptée par GORDON pour représenter les résultats expérimentaux d'HODGKINSON, enfin RANKINE lui donna sa forme définitive. La contrainte de compression moyenne admissible, donnée par la *formule Gordon-Rankine*, est

$$\sigma_W = \frac{a}{1 + b\left(\frac{l}{k_z}\right)^2}, \qquad (a)$$

où a désigne une contrainte et b un facteur numérique, ces deux valeurs sont constantes pour un matériau donné. Par un choix convenable de ces constantes, la formule peut être, de façon satisfaisante, en concordance avec les résultats expérimentaux entre certaines limites.

La *formule linéaire*, développée principalement sur la base des travaux exécutés par L. v. TETMAJER, utilisée par l'American Railway Engineering Association et incorporée dans le Chicago Building Code de 1924, donne la contrainte d'utilisation (hectobars) sous la forme :

$$\sigma_W = 11{,}2 - 0{,}049\, l/k_z\,. \qquad (b)$$

Cette formule n'est utilisable que pour $30 < l/k_z < 120$ dans le cas de membrures principales et jusqu'à $l/k_z = 150$ pour les membrures secondaires. Pour des valeurs de $l/k_z < 30$, on prend $\sigma_W = 9{,}8$ hectobars.

La formule parabolique, proposée par A. OSTENFELD [13], est parfois

(12) En ce qui concerne l'historique de la formule voir E. H. SALMON, *Columns*, Londres, 1921. Voir aussi TODHUNTER et PEARSON, *History of the Theory of Elasticity*, vol. 1, p. 105, Cambridge, 1886.

(13) *Z. ver. deut. Ing.*, vol. 42, p. 1462, 1898. Voir aussi C. E. FULLER et W. A. JOHNSTON, *Applied Mechanics*, vol. 2, p. 359, 1919.

employée. Elle donne, pour la contrainte de compression critique, l'expression :

$$\sigma_{cr} = a - b\left(\frac{l}{k_z}\right)^2, \qquad (c)$$

où les constantes a et b dépendent des propriétés mécaniques du matériau. Pour l'acier de construction, l'équation (*c*) s'écrit quelquefois sous la forme suivante :

$$\sigma_{cr} = 28 - 0{,}000\,931\left(\frac{l}{k_z}\right)^2. \qquad (d)$$

Elle représente une parabole tangente à la courbe d'Euler en $l/k_z = 122{,}5$ et pour les poteaux courts $\sigma_{cr} = 28$ hectobars. On obtient la contrainte d'utilisation, par cette formule, en utilisant un facteur de sécurité convenable variant entre 2,5 et 3.

La réglementation de l'American Institute of Steel Construction (AISC) de 1948 spécifie l'emploi d'une formule parabolique pour la contrainte d'utilisation en compression :

$$\sigma_W = 11{,}9 - 0{,}000\,340\left(\frac{l}{k_z}\right)^2, \qquad (e)$$

pour $l/k_z < 120$ et pour des membrures principales ou secondaires. Pour les membrures secondaires (entretoisement, etc.), avec $120 < l/k_z < 200$, la contrainte de compression admissible est donnée par une formule du type Gordon-Rankine :

$$\sigma_W = \frac{12{,}6}{1 + \dfrac{l^2}{12{,}6\,k_z^2}}. \qquad (f)$$

Dans le cas de membrures principales, pour $120 < l/k_z < 200$, la contrainte de compression admissible s'obtient en multipliant l'équation (*f*) par

$$1{,}6 - \frac{l}{200\,k_z}. \qquad (g)$$

La réglementation de l'American Railway Engineering Association (AREA) de 1946 et celle de l'American Association of State Highway Officials (AASHO) de 1949 utilisent une formule parabolique pour les membrures comprimées :

$$\sigma_W = 10{,}5 - 0{,}000\,175\,(l/k_z)^2, \quad \text{pour } l/k_z < 140. \qquad (h)$$

Le code de construction de la ville de New York (1947) emploie la formule (*f*) pour les membrures, avec $l/k_z < 120$ et une valeur maximum de 10,5 hectobars.

Problèmes

1. Un poteau en acier de construction à extrémités articulées a pour moment d'inertie $I_z = 476{,}5$ cm⁴ et pour section $A = 41{,}3$ cm². On considère trois longueurs différentes de ce poteau, $l = 1{,}50$ m, 3 m et 4 m. Quelles sont les charges de sécurité, en kilonewtons, sur le poteau, calculées à l'aide (1) de la réglementation AISC, (2) du code de construction de la ville de New York, (3) de la formule (*b*), (4) de la réglementation AREA ?

Réponse.

	$l = 1{,}50$ m	$l = 3$ m	$l = 4$ m
(1)	480,81	396,89	308,90
(2)	449,06	376,48	305,72
(3)	387,37	294,84	233,15
(4)	435,45	391,00	346,55

2. Choisir une poutre I à ailes larges devant constituer un poteau de 7,50 m de long à extrémités encastrées et soumis à une charge 900 kN. Utiliser l'équation (*e*).

Solution. Prenons pour longueur réduite $l = \frac{1}{2}(7{,}50) = 3{,}75$ m, l'équation (*e*) donne

$$\frac{90\,000}{A} = \frac{12{,}6}{1 + \dfrac{781{,}25}{k^2}}. \qquad (i)$$

en supposant que $l/k_z < 120$. On détermine l'aire minimum en prenant $\sigma_W = 10{,}5$ hectobars comme pour un poteau court. Ce qui donne $A = 90\,000/10{,}5 = 8\,571$ mm². Nous ne devons donc pas choisir une section dont l'aire soit inférieure à 8 571 mm². Adoptons d'abord un profilé de 200 mm de hauteur pour lequel $A = 9\,731$ mm², $k_z = 62$ mm et $l/k_z = 60{,}5$ donc inférieur à 120. La contrainte réelle donnée par le premier membre de l'équation (*i*) est 10,47 hectobars, tandis que la contrainte admissible donnée par le second membre de cette même équation est 9,25 hectobars. On peut donc choisir une section plus faible : on essaie un profilé I à larges ailes pour lequel $A = 9\,181$ mm², $k_z = 49$ mm et $l/k_z = 76{,}5$. La contrainte réelle est 9,51 hectobars et la contrainte admissible est 9,51 hectobars, cette seconde section est, par conséquent, adéquate.

10

TORSION
FLEXION ET TORSION COMBINÉES

61. Torsion d'un arbre circulaire

Considérons un arbre circulaire encastré à son extrémité et soumis à un couple de torsion appliqué à son extrémité inférieure (fig. 246). On démontre, par des mesures effectuées sur la surface, que les sections circulaires de l'arbre restent circulaires pendant la torsion, et que leurs diamètres et les distances qui les séparent ne varient pas, à condition que l'angle de torsion soit petit.

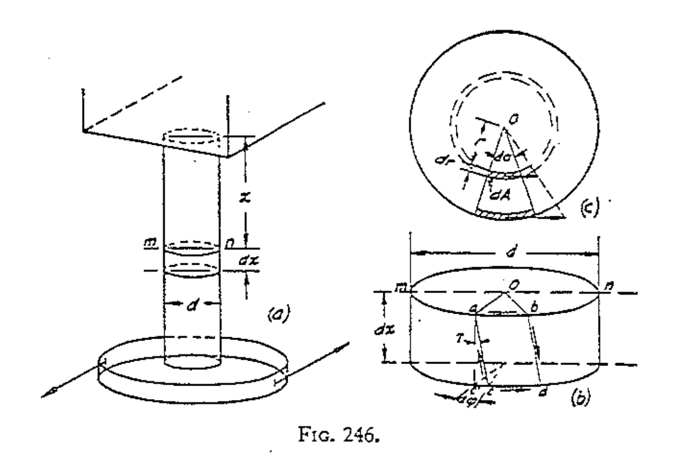


FIG. 246.

Un disque isolé, comme celui de la figure 246*b*, se trouve dans l'état de déformation suivant : sa section inférieure est soumise à une rotation par rapport à sa section supérieure d'angle $d\varphi$, où φ représente la rotation de la section *mn* par rapport à l'extrémité encastrée. Un élément rectangulaire *abcd* de la surface latérale du disque se déforme comme l'indique la figure 246*b*. Les longueurs des côtés restent essentiellement les mêmes et seuls les angles aux sommets varient. L'élément se trouve en état de

cisaillement pur (voir § 16) et l'on détermine la valeur de la déviation γ par le petit triangle *cac'* :

$$\gamma = \frac{c'c}{ac'}.$$

Puisque $c'c$ est le petit arc de rayon $d/2$ correspondant à la différence $d\varphi$ des angles de rotation de deux sections voisines, $c'c = (d/2)d\varphi$ et l'on obtient

$$\gamma = \frac{1}{2}\frac{d\varphi}{dx}d. \qquad (a)$$

Pour un arbre soumis à un couple de torsion à son extrémité, l'angle de torsion est proportionnel à la longueur et $d\varphi/dx$ est constant. Ce rapport représente *l'angle de torsion par unité de longueur de l'arbre* et nous le désignerons par θ. L'équation (*a*) s'écrit donc

$$\gamma = \tfrac{1}{2}\theta d. \qquad (148)$$

Les contraintes de cisaillement, s'exerçant sur les côtés de l'élément et produisant le cisaillement considéré, ont les directions indiquées sur la figure. La valeur de chacune de ces contraintes, d'après (39), est

$$\tau = \tfrac{1}{2}G\theta d. \qquad (149)$$

Donc, nous avons déterminé complètement l'état de contrainte d'un élément de la surface de l'arbre.

Pour un élément pris dans la masse de l'arbre, on suppose que non seulement les contours circulaires des sections ne sont pas déformés mais aussi que les sections elles-mêmes restent planes et, pendant la rotation, se comportent comme si elles étaient absolument rigides. Ceci revient à dire que tous les diamètres d'une section restent droits et tournent d'un même angle. Des essais sur arbres circulaires montrent que la théorie développée sur cette hypothèse concorde parfaitement avec les résultats expérimentaux. Dans ces conditions, l'étude relative à l'élément *abcd* pris sur la surface de l'arbre (fig. 246*b*) reste également valable pour un élément analogue appartenant à la surface d'un cylindre intérieur dont le rayon r remplace $d/2$ (fig. 246*c*). L'épaisseur dr de l'élément, dans la direction radiale, est considérée comme très faible. De tels éléments sont aussi en état de cisaillement pur et la contrainte de cisaillement sur leurs côtés est

$$\tau = Gr\theta. \qquad (b)$$

Cette relation établit que la contrainte de cisaillement varie directement avec la distance r à l'axe de l'arbre. La figure 247 représente la distribution des contraintes. La contrainte maximum se développe sur la surface extérieure de l'arbre. Pour un matériau ductile, l'écoulement plastique commence sur cette surface. Pour un matériau moins résistant au cisaillement longitudinal qu'au cisaillement transversal, par exemple, les premières fissures d'un arbre circulaire en bois dont les fibres sont parallèles à l'axe sont dues aux contraintes de cisaillement s'exerçant dans les sections axiales et elles apparaissent ensuite sur la surface de l'arbre dans la direction longitudinale. Dans le cas d'un matériau moins résistant en traction qu'en cisaillement, par exemple, un arbre circulaire en fonte ou un bâton de craie, une fissure se développe souvent suivant une hélice inclinée de 45° sur l'axe de l'arbre (fig. 248). L'explication en est simple : rappelons qu'un état de cisaillement pur est équivalent à une traction dans une direction et une compression égale dans la direction perpendiculaire (voir fig. 45). Un élément rectangulaire, découpé dans la couche extérieure d'un arbre en torsion et dont les côtés font un angle de 45° avec l'axe de l'arbre, est soumis aux contraintes de la figure 248. Les contraintes de traction produisent alors la fissure hélicoïdale en question.

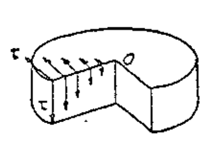


FIG. 247.

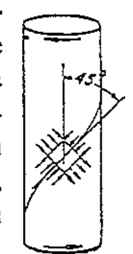


FIG. 248.

Recherchons alors la relation entre le couple de torsion M_t appliqué et les contraintes qu'il produit. D'après les conditions d'équilibre de la partie de l'arbre comprise entre l'extrémité inférieure et la section mn (fig. 246*a*), on conclut que les contraintes de cisaillement réparties sur la section sont statiquement équivalentes à un couple égal et opposé au couple de torsion M_t. Pour chaque élément d'aire dA (fig. 246*c*) l'effort tranchant est τdA. Le moment de cet effort par rapport à l'axe de l'arbre est $(\tau dA)r = G\theta r^2 dA$ d'après l'équation (*b*). L'intégration de ces moments, sur l'aire totale de la section, donne le couple de torsion M_t, c'est-à-dire

$$M_t = \int_A G\theta r^2 \,dA = G\theta \int_A r^2 \,dA = G\theta I_p, \qquad (c)$$

où I_p est le moment d'inertie polaire de la section circulaire. Pour un cercle de diamètre d nous avons (voir appendice A, p. 420) $I_p = \pi d^4/32$, et donc

$$M_t = G\theta \frac{\pi d^4}{32}$$

et

$$\theta = \frac{M_t}{G}\frac{32}{\pi d^4} = \frac{M_t}{GI_p}. \qquad (150)$$

On constate que θ, l'angle de torsion par unité de longueur de l'arbre, varie directement avec le couple de torsion appliqué et en raison inverse à la fois du module de cisaillement G et de la quatrième puissance du diamètre. Pour un arbre de longueur l, l'angle total de torsion est

$$\varphi = \theta l = \frac{M_t l}{GI_p}. \qquad (151)$$

Cette équation a été vérifiée par de nombreuses expériences, ce qui prouve l'exactitude des hypothèses admises lors de l'établissement de la théorie.

On notera que les essais de torsion sont communément utilisés pour déterminer le module d'élasticité G au cisaillement de différents matériaux. En effet, si l'on peut mesurer l'angle de torsion produit sur un arbre donné par un couple donné, alors on détermine aisément G par l'équation (151).

Portons la valeur de θ, tirée de (150), dans l'équation (149), nous obtenons une équation permettant de calculer la contrainte de cisaillement maximum en torsion d'un arbre circulaire :

$$\tau_{max} = \frac{M_t d}{2 I_p} = \frac{16 M_t}{\pi d^3}. \qquad (152)$$

La contrainte de cisaillement maximum est proportionnelle au couple de torsion M_t et est inversement proportionnelle au cube du diamètre de l'arbre.

En pratique, le diamètre nécessaire d'un arbre se calcule fréquemment à partir de la puissance H en watts qu'il transmet. Connaissant H, le couple de torsion s'obtient par la relation connue :

$$M_t \cdot \frac{2\pi n}{60} = 736\, H, \qquad (153)$$

où n représente le nombre de révolutions de l'arbre par minute. La quantité $2\pi n/60$ désigne l'angle de rotation par seconde, et le premier membre de l'équation (153) représente le travail effectué en une seconde par le couple de torsion M_t, exprimé en m · N. Le second membre repré-

sente la puissance fournie (W), calculée à l'aide de H. Portons la valeur de M_t, tirée de (153), dans l'équation (152), nous avons

$$d(\mathrm{m}) = 38{,}4 \sqrt[3]{\frac{H}{n\tau_{max}}}. \qquad (154)$$

Prenons, par exemple, pour contrainte d'utilisation de cisaillement $\tau_W = 6$ hectobars, nous avons

$$d(\mathrm{m}) = 8{,}8 \sqrt[3]{\frac{H}{n}}.$$

Problèmes

1. Déterminer le diamètre d de l'arbre d'une machine de 149,2 kW tournant à la vitesse $n = 120$ tr/mn. On suppose que la contrainte d'utilisation $\tau_W = 2$ hectobars.

Réponse. $d = 14{,}3$ cm.

2. Déterminer la puissance en W transmise par un arbre, sachant que $d = 15$ cm, $n = 120$ tr/mn, $G = 84 \times 10^2$ hectobars, et l'angle de torsion mesuré entre deux sections distantes de 7,50 m, est égal à $\frac{1}{15}$ radian.

Solution. D'après l'équation (151)

$$M_t = \frac{\pi d^4}{32} \cdot \frac{\varphi G}{l} = \frac{\pi \times 150^4}{32} \cdot \frac{8\,400}{15 \times 7\,500}.$$

La puissance transmise, d'après (153), est

$$H = \frac{M_t \cdot 2\pi n}{60 \times 75 \times 1\,000}$$

$$= \frac{\pi \times 150^4 \times 84 \times 10^2 \times 2\pi \times 120}{60 \times 75 \times 1\,000 \times 32 \times 15 \times 7\,500} = 622 \text{ ch ou } 457{,}8 \text{ kW}.$$

3. Un arbre de diamètre $d = 9$ cm tourne à la vitesse de 45 tr/mn. Déterminer la puissance transmise sachant que la contrainte de cisaillement maximum est 3 hectobars.

4. Un câble d'acier ($G = 84 \times 10^2$ hectobars) doit être proportionné de telle sorte que la contrainte de cisaillement maximum soit égale à 9,49 hectobars pour un angle de torsion de 90°. Déterminer le rapport l/d.

Réponse. $l/d = 698$.

5. Un arbre en acier à extrémités encastrées (fig. 249) est soumis à l'action d'un couple de torsion M_t appliqué sur une section intermédiaire mn connue.
Déterminer l'angle de torsion sachant que la contrainte d'utilisation τ_W est

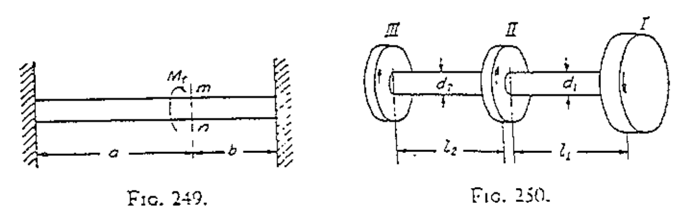


FIG. 249. FIG. 250.

Solution. Pour les deux parties de l'arbre les angles de torsion sont égaux. Donc, d'après (151), les moments de torsion sont inversement proportionnels aux longueurs de ces parties. Si $a > b$, le plus grand moment de torsion se situe sur la partie droite de l'arbre et sa valeur est $M_t \cdot a/(a+b)$. Substituons cette valeur au couple de torsion et τ_W à τ_{max} dans l'équation (152), on obtient l'équation permettant de calculer d :

$$d = \sqrt[3]{\frac{16\,aM_t}{(a+b)\pi\tau_W}}.$$

On détermine ensuite l'angle de torsion par l'équation (151).

6. La poulie I (fig. 250) transmet 500 kW qui se répartissent comme suit : 200 kW sur la poulie II et 300 kW sur la poulie III. Trouver quel doit être le rapport des diamètres d_1 et d_2 pour que la contrainte maximum soit la même dans les deux parties de l'arbre. Déterminer le rapport des angles de torsion pour ces deux parties.

Solution. Les couples, dans les deux parties, sont dans le rapport 5 : 3. Afin d'avoir même contrainte maximum il faut, d'après (152), que

$$\frac{d_1}{d_2} = \sqrt[3]{\frac{5}{3}}$$

Les angles de torsion, d'après (151) et (152), sont dans le rapport

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{l_1}{l_2} \sqrt[3]{\frac{3}{5}}.$$

7. En supposant que l'arbre du problème précédent a un diamètre constant et tourne à 200 tr/mn, trouver la grandeur de ce diamètre sachant que $\tau_W = 4{,}22$ hectobars. Déterminer l'angle de torsion pour chaque partie de l'arbre, sachant que $G = 84 \times 10^3$ hectobars et $l_1 = l_2 = 1{,}20$ m.

8. Déterminer la longueur d'un arbre en acier de 50,8 mm de diamètre ($G = 84 \times 10^3$ hectobars), sachant que la contrainte maximum est égale à 9,49 hectobars pour un angle de torsion de 6°.

Réponse. $l = 2{,}36$ m.

9. Déterminer le diamètre pour lequel l'angle de torsion de l'arbre, et non la contrainte maximum, devient le facteur déterminant du calcul. On pose $G = 84 \times 10^3$ hectobars, $\tau_W = 2{,}1$ hectobars et la torsion maximum admissible est $\frac{1}{4}°$ par mètre.

Solution. Eliminons M_t dans les équations :

$$\frac{16\,M_t}{\pi d^3} = 2{,}1 \quad \text{et} \quad \frac{32\,M_t}{G\pi d^4} = \frac{\pi \times 1\,000}{180 \times 3\,600 \times 1\,000},$$

on obtient $d = 103$ mm, si bien que pour $d < 103$ mm, l'angle de torsion devient le facteur déterminant du calcul.

10. Déterminer le couple de torsion dans chaque partie de l'arbre à extrémités encastrées et soumis aux moments M'_t, M''_t, appliqués en deux sections intermédiaires (fig. 251).

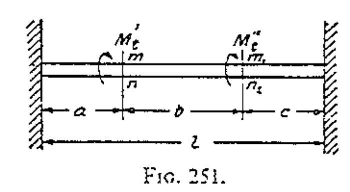


Fig. 251.

Solution. En déterminant les couples de torsion produits dans chaque partie de l'arbre par chacun des éléments M'_t, M''_t (voir problème 5 ci-dessus) et en additionnant ces derniers dans chaque partie, nous obtenons :

$$\frac{M'_t(b+c)+M''_t c}{l}, \quad \frac{M'_t a - M''_t c}{l}, \quad \frac{M'_t a + M''_t(a+b)}{l}.$$

11. Déterminer les diamètres et les angles de torsion de l'arbre du problème 6, pour $n = 120$ tr/mn, $\tau_{max} = 2$ hectobars, $l = 1{,}80$ m et $l = 1{,}20$ m.

62. Torsion d'un arbre creux

D'après l'étude concernant la torsion d'un arbre plein (voir fig. 247), nous avons vu que seule la matière située sur la surface extérieure de l'arbre est soumise à des contraintes pouvant atteindre la limite assignée pour la contrainte d'utilisation. La matière à l'intérieur de l'arbre travaille sous des contraintes inférieures. Par suite, dans le cas où la réduction de poids revêt une grande importance, par exemple, pour les arbres des hélices d'avions, il est recommandé d'utiliser des arbres creux. Lors de l'étude des arbres creux, on échafaude les mêmes hypothèses que dans le cas d'arbres pleins. L'expression générale des contraintes de cisaillement est alors la même que celle donnée par l'équation (*b*) du paragraphe précédent. Toutefois, dans le calcul du moment des contraintes de cisaillement, le rayon r varie depuis le rayon, $\frac{1}{2}d_1$, de l'alésage intérieur jusqu'au rayon extérieur de l'arbre que l'on désigne comme précédemment par $\frac{1}{2}d$. Par suite, on remplace l'équation (*c*) du paragraphe précédent par l'équation suivante :

$$G\theta \int_{\frac{1}{2}d_1}^{\frac{1}{2}d} r^2 \mathrm{d}A = M_t = G\theta I_p,$$

où $I_p = (\pi/32)(d^4 - d_1^4)$ représente le moment d'inertie polaire de la section annulaire. D'où

$$\theta = \frac{32\,M_t}{\pi(d^4 - d_1^4)\,G} = \frac{M_t}{GI_p} \tag{155}$$

et l'angle de torsion est

$$\varphi = \theta l = \frac{M_t l}{GI_p}. \tag{156}$$

Substituons l'équation (155) dans (149), nous obtenons

$$\tau_{max} = \frac{16\,M_t}{\pi d^3\left(1 - \frac{d_1^4}{d^4}\right)} = \frac{M_t d}{2\,I_p}. \tag{157}$$

On constate, d'après (156) et (157), qu'en prenant par exemple $d_1 = \frac{1}{2}d$ l'angle de torsion et la contrainte maximum, comparés aux mêmes quantités pour un arbre plein de diamètre d, sont accrus de 6 pour cent environ tandis que la réduction de poids atteint 25 pour cent.

Problèmes

1. Un arbre cylindrique creux, en acier, de diamètre extérieur 25 cm et intérieur 15 cm, tourne à 1 000 tr/mn. Quelle est la puissance développée en ch, sachant que $\tau_{max} = 6$ hectobars ?

Réponse. $H = 22\,370$ ch.

2. Trouver le couple de torsion maximum que l'on peut appliquer à un arbre circulaire creux, sachant que $d = 15$ cm, $d_1 = 10$ cm et $\tau_w = 6$ hectobars.

3. L'arbre creux d'une hélice de navire transmet une puissance de 8 000 ch à 100 tr/mn et pour une contrainte d'utilisation de 3 hectobars. Trouver d, si $d/d_1 = 2$.

Solution. $M_t = \dfrac{8\,000 \times 75 \times 60 \times 1\,000}{2\pi \times 100}$ mm · daN.

L'équation (157) s'écrit

$$\tau_{max} = \frac{16}{15} \cdot \frac{16\, M_t}{\pi d^3},$$

d'où l'on tire

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 \times 16 \times 8\,000 \times 75 \times 60 \times 1\,000}{15 \times 2\pi \times 100 \times \pi \times 3}} = 470 \text{ mm},$$

et par suite $d_1 = 235$ mm.

63. Arbre de section rectangulaire

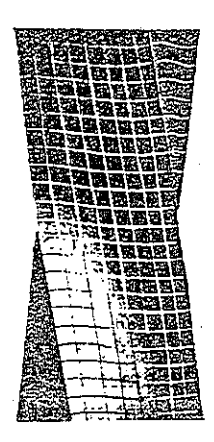


Fig. 252.

Le problème de la torsion d'un arbre de section rectangulaire est complexe en raison du gauchissement pendant la torsion. Ce gauchissement est mis en évidence expérimentalement à l'aide d'une barre rectangulaire en caoutchouc sur les faces de laquelle a été tracé un réseau de petits carrés. On remarque, sur la photographie [1] (fig. 251) que, pendant la torsion, les droites initialement perpendiculaires à l'axe de la barre s'incurvent. Ceci prouve que la distorsion des petits carrés varie le long des côtés de cette section, atteignant sa valeur maximum au milieu pour s'annuler aux angles. Nous admettrons donc que la contrainte de cisaillement varie avec cette distorsion, autrement dit qu'elle est maximum au milieu des côtés et nulle aux angles de la section. Une étude rigoureuse [2] du problème montre que la contrainte de cisaillement maximum se produit au milieu des grands côtés de la section rectangulaire et s'exprime par

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{\alpha b c^2}, \tag{158}$$

(1) Cette photographie est empruntée à C. Bach, *Elasticität und Festigkeit*, 6e éd., p. 312, 1911.

(2) La résolution complète est due à Saint-Venant, *Mém. sav. étrangers*, vol. 14, 1855. On trouvera un compte rendu de cette étude dans Todhunter et Pearson, *History of the Theory of Elasticity*, vol. 2, p. 312, Cambridge, 1893.

où b est la longueur et c la largeur de la section rectangulaire, α étant un facteur numérique dépendant du rapport b/c. Le tableau 3 ci-dessous donne plusieurs valeurs de α. On calcule la contrainte maximum, avec une exactitude satisfaisante, d'après la relation approchée :

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{bc^2}\left(3 + 1{,}8\,\frac{c}{b}\right).$$

Tableau 3. — Données sur la torsion d'un arbre de section rectangulaire

$b/c =$	1,00	1,50	1,75	2,00	2,50	3,00	4,00	6	8	10	∞
$\alpha =$	0,208	0,231	0,239	0,246	0,258	0,267	0,282	0,299	0,307	0,313	0,333
$\beta =$	0,141	0,196	0,214	0,229	0,249	0,263	0,281	0,299	0,307	0,313	0,333

L'angle de torsion par unité de longueur, dans le cas d'une section rectangulaire, est donné par

$$\theta = \frac{M_t}{\beta b c^3 G}. \tag{159}$$

La troisième ligne du tableau 3 donne les valeurs du facteur numérique β.

Dans tous les cas considérés l'angle de torsion, par unité de longueur, est proportionnel au couple de torsion et se représente par l'équation :

$$\theta = \frac{M_t}{C}, \tag{a}$$

où C est une constante appelée *rigidité à la torsion* de l'arbre.

Pour un arbre circulaire (éq. 150), $C = GI_p$.

Pour un arbre rectangulaire (éq. 159), $C = \beta b c^3 G$.

64. Ressort hélicoïdal

Spires serrées. Supposons qu'un ressort hélicoïdal, de section circulaire, soit soumis à l'action d'efforts axiaux P (fig. 253) et que l'une quelconque des spires soit contenue sensiblement dans un plan perpendiculaire à l'axe de l'hélice. Considérons l'équilibre de la partie supérieure du ressort limitée par une section axiale mn (fig. 253b), on conclut, d'après les équations de la statique, que les contraintes sur une section mn de la spire se réduisent à un effort tranchant P passant par le centre de la section et à un couple s'exerçant, en sens inverse des aiguilles d'une montre, dans le plan de la section. La valeur du couple est PR, R représentant le

rayon de la surface cylindrique enveloppant la ligne moyenne du ressort. Le couple PR tord la spire et provoque une contrainte de cisaillement maximum égale, d'après (152), à

$$\tau_1 = \frac{16\,PR}{\pi d^3}, \qquad (a)$$

où d est le diamètre de la section mn de la spire. A cette contrainte, due à la torsion, se superpose la contrainte due à l'effort tranchant P. On suppose, dans une approximation grossière, que cet effort tranchant est

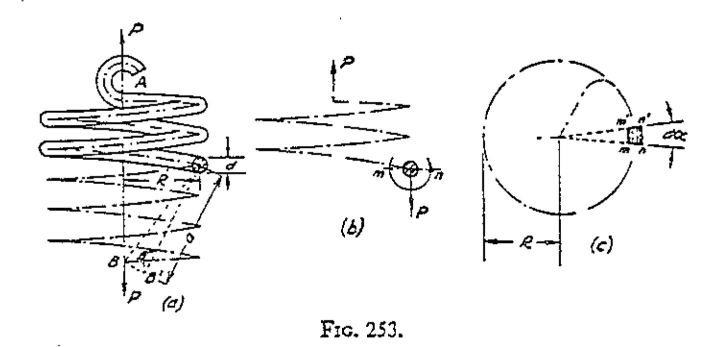


Fig. 253.

réparti uniformément sur la section. La contrainte de cisaillement correspondante est alors

$$\tau_2 = \frac{4\,P}{\pi d^2}. \qquad (b)$$

Au point m (fig. 253b) les directions de τ_1 et τ_2 coïncident, si bien que la contrainte de cisaillement maximum s'y développe et a pour valeur :

$$\tau_{max} = \tau_1 + \tau_2 = \frac{16\,PR}{\pi d^3}\left(1 + \frac{d}{4\,R}\right). \qquad (160)$$

On constate que le second terme entre parenthèses, qui représente l'influence de l'effort tranchant, augmente avec le rapport d/R. En pratique, son importance est accrue dans les ressorts hélicoïdaux lourds, du type utilisé pour les voitures de chemin de fer. Les points tels que m, situés sur les génératrices intérieures d'une spire sont dans de moins bonnes conditions que les points tels que n. Les expériences réalisées sur de gros ressorts montrent que les fissures prennent naissance sur les génératrices intérieures des spires.

Il existe une autre raison pour laquelle on doit s'attendre à voir surgir des contraintes plus élevées sur le côté intérieur des spires. Lors du calcul des contraintes dues à la torsion nous avons utilisé l'équation (a), établie pour des arbres cylindriques. Or, en réalité, chaque élément du ressort se trouve dans les conditions indiquées sur la figure 254. On remarque, en effet, que si la section bf tourne par rapport à ac, en raison de la torsion, le déplacement du point b par rapport à a est le même que celui du point f par rapport à c. Du fait que la distance ab est plus petite que la distance cf, la déviation de la génératrice intérieure ab est plus grande que celle de cf, et donc les contraintes de cisaillement produites par PR sont plus grandes en b qu'en f. Pour tenir compte de ce fait ainsi que de l'influence de l'effort tranchant ([3]), on remplace l'équation (160) par l'équation suivante :

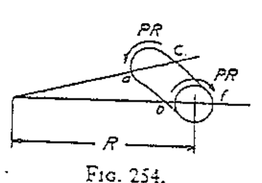


Fig. 254.

$$\tau_{max} = \frac{16\,PR}{\pi d^3}\left(\frac{4\,m-1}{4\,m-4} + \frac{0.615}{m}\right), \qquad (161)$$

où

$$m = \frac{2\,R}{d}.$$

On remarque que le *coefficient de correction* entre parenthèses croît en raison inverse de m. Par exemple, pour $m = 4$ ce coefficient est d'environ 1,40 et pour $m = 10$, il est égal à 1,14.

Dans le calcul de la déformation du ressort on ne tient compte généralement que de l'influence de la torsion des spires. Pour l'angle de torsion d'un élément, pris entre deux sections adjacentes mn et $m'n'$ (fig. 253c), nous obtenons, à l'aide de (151) où $R\mathrm{d}\alpha$ remplace l,

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{PR \cdot R\mathrm{d}\alpha}{GI_p}.$$

En raison de la torsion la partie inférieure du ressort subit une rotation par rapport au centre de mn (fig. 253a) et le point d'application B de

([3]) Ces recherches furent effectuées par V. Roever, *Z. Ver. deut. Ing.*, vol. 57, p. 1906, 1913 ; par A. M. Wahl, *Trans. A.S.M.E.*, 1928. Ce dernier a aussi déterminé expérimentalement les contraintes en effectuant des mesures sur la surface des spires. Une étude complète des différents types de ressort est faite par Wahl, *loc. cit.*, p. 212.

l'effort P décrit le petit arc BB' égal à $a d\varphi$. La composante verticale de ce déplacement est

$$B'B'' = BB' \frac{R}{a} = R d\varphi = \frac{PR^3 dx}{GI_p}. \qquad (c)$$

La déformation complète du ressort s'obtient en sommant les flèches $B'B''$ relatives à chaque élément $mnm'n'$, le long du ressort. On a donc

$$\delta = \int_0^{2\pi n} \frac{PR^3}{GI_p} dx = \frac{64 nPR^3}{Gd^4}, \qquad (162)$$

où n représente le nombre de spires.

Dans le cas d'un ressort à section non circulaire, on peut utiliser la méthode ci-dessus pour calculer les contraintes et les déformations si, au lieu des équations (151) et (152), l'on prend les équations correspondant au type de section considérée. Par exemple, pour une section rectangulaire, on utilisera les équations (158) et (159).

Problèmes

1. Déterminer la contrainte maximum et l'allongement d'un ressort hélicoïdal (fig. 253), sachant que $P = 120$ daN, $R = 10$ cm, $d = 2$ cm, $G = 84 \times 10^3$ hectobars et que le nombre de spires est 20.

Réponse. $\tau_{max} = 8,75$ hectobars. $\delta = 11,45$ cm.

2. Résoudre le problème 1 en supposant que la section du ressort est un carré de 2 cm de côté.

Solution. Supposons que le coefficient correcteur de l'effort tranchant et de la courbure des spires (voir éq. 161) soit le même, dans ce cas, que celui d'une section circulaire, nous obtenons, d'après (158),

$$\tau_{max} = \frac{PR}{0,208\, b^3} 1,145 = \frac{120 \times 100 \times 1,145}{0,208 \times 20^3} = 8,26 \text{ hectobars}.$$

On remplace $\pi d^4/32$ par $0,141 d^4$ (voir éq. 159) pour calculer l'allongement. Nous avons alors

$$\delta = \frac{114,5\, \pi}{32 \times 0,141} = 79,7 \text{ mm}.$$

3. Comparer les poids de deux ressorts hélicoïdaux, l'un à section circulaire, l'autre à section carrée, calculés en vue de satisfaire aux conditions du problème 1 et ayant même contrainte maximum. Prendre, dans les deux cas, 1,14 comme coefficient de correction. Comparer les déformations de ces deux ressorts.

Fig. 255.

Solution. La longueur du côté du ressort à section carrée se détermine par l'équation $\pi d^3/16 = 0,208 b^3$, d'où $b = \sqrt{0,944}\, d = 0,981\, d$. Les poids des ressorts sont dans le même rapport que les aires de leur section, c'est-à-dire dans le rapport

$$\frac{\pi d^2}{4} : (0,981\, d)^2 = 0,816.$$

Les déformations des deux ressorts sont dans le rapport

$$0,141\, b^4 : \frac{\pi d^4}{32} = 0,141 \times 0,926 : \frac{\pi}{32} = 1,33.$$

4. Comment se répartit la charge P entre les deux extrémités du ressort hélicoïdal de la figure 255, sachant que le nombre de spires au-dessus du point d'application de la charge est 6 et qu'il est de 5 au-dessous ?

Réponse. $R_1 : R_2 = 5 : 6$.

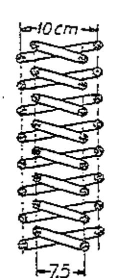


Fig. 256.

5. Deux ressorts hélicoïdaux constitués par le même matériau, ayant même section circulaire et même longueur, assemblés comme l'indique la figure 256, sont comprimés entre deux plans parallèles. Déterminer la contrainte maximum dans chaque ressort, pour $d = 1,25$ cm et $P = 45$ daN.

Solution. Il résulte de l'équation (162) que la charge P se répartit entre les deux ressorts en raison inverse des cubes des rayons des spires, c'est-à-dire, les efforts comprimant les ressorts extérieur et intérieur sont dans le rapport 421,875 : 1 000 ou 27 : 64. Les contraintes maximums dans ces ressorts sont alors (d'après éq. 161), 2,06 hectobars et 3,87 hectobars.

6. Quelle doit être la charge limite du ressort du problème 1, sachant que la contrainte d'utilisation est $\tau_w = 14$ hectobars ? Quelle sera la déformation du ressort pour cette charge limite ?

Réponse. 192 daN. $\delta = 18,35$ mm.

7. Un ressort conique (fig. 257) est soumis à l'action des efforts axiaux P. Déterminer la valeur de sécurité de P pour une contrainte d'utilisation

$\tau_w = 32$ hectobars ; le diamètre de la section est $d = 2{,}5$ cm, le rayon du cône au sommet du ressort est $R_1 = 5$ cm et à la base $R_2 = 20$ cm. Déterminer l'allongement du ressort, sachant que le nombre de spires est n et que la projection horizontale de la ligne moyenne du ressort est une spirale d'équation :

$$R = R_1 + \frac{(R_2 - R_1)\alpha}{2\pi n}.$$

Solution. Pour un point quelconque A de la ligne moyenne du ressort, déterminé par l'angle α, la distance à l'axe du ressort est

$$R = R_1 + \frac{(R_2 - R_1)\alpha}{2\pi n}$$

Le couple de torsion correspondant est

$$M_t = P\left[R_1 + \frac{(R_2 - R_1)\alpha}{2\pi n}\right].$$

Le couple de torsion maximum, en $\alpha = 2\pi n$, est PR_2. La limite de sécurité pour P, d'après (161), est

$$P = \frac{32 \times \pi \times 25^3}{16 \times 200 \times 1{,}09} = 450\ \text{daN}.$$

Fig. 257

La déformation du ressort s'obtient par l'équation (c) de la page 280 :

$$\delta = \frac{32\,P}{\pi d^4 G}\int_0^{2\pi n}\left[R_1 + \frac{(R_2 - R_1)\alpha}{2\pi n}\right]^3 d\alpha$$

$$= \frac{16\,Pn}{d^4 G}(R_1^2 + R_2^2)(R_1 + R_2).$$

8. Déterminer l'aire de section nécessaire des spires d'un ressort conique satisfaisant aux mêmes conditions du problème précédent, mais ayant une section carrée. Prendre 1,09 pour facteur de correction (voir problème précédent).

Réponse. $b^2 = 6$ cm^2.

65. Flexion et torsion combinées des arbres circulaires

Dans l'étude antérieure sur la torsion (voir p. 268) on a supposé que l'arbre circulaire subissait une torsion simple. En pratique, on rencontre

souvent des cas où la torsion s'accompagne d'un moment fléchissant. Les efforts, transmis à un arbre par une poulie, un engrenage ou un volant, peuvent généralement se réduire à un couple de torsion et à un effort fléchissant. La figure 258 indique un cas simple de cette sorte. Un arbre circulaire est encastré à une extrémité et sollicité à l'autre par un effort P,

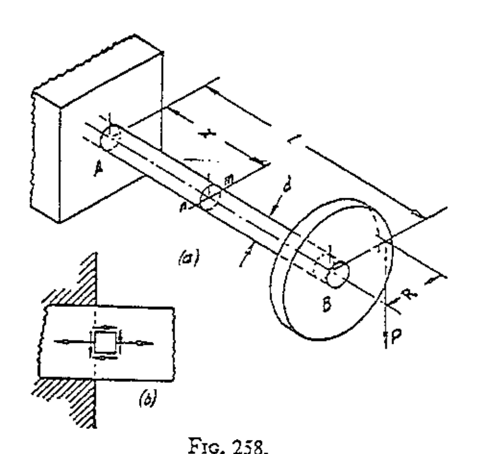


Fig. 258.

placé à la distance R de l'axe. Ce cas se réduit à une sollicitation par un couple de torsion $M_t = PR$ et par un effort transversal P à l'extrémité libre (4). Le couple de torsion est constant sur l'axe et le moment fléchissant dû à J, sur une section quelconque, est

$$M = -P(l - x). \tag{a}$$

Dans l'étude de la contrainte maximum produite dans l'arbre il faut considérer (1) les contraintes de cisaillement dues au couple M_t, (2) les contraintes normales dues au moment fléchissant (a) et (3) les contraintes de cisaillement dues à l'effort tranchant P. La contrainte de torsion est maximum sur la circonférence de l'arbre et a pour valeur

$$\tau_{max} = \frac{16\,M_t}{\pi d^3}. \tag{b}$$

La contrainte normale σ_x, due à la flexion, est maximum dans les fibres

(4) Le poids de l'arbre et de la poulie est négligé dans ce cas.

les plus éloignées de l'axe neutre, à l'extrémité encastrée où le moment fléchissant est maximum en valeur absolue et a pour valeur

$$(\sigma_x)_{max} = \frac{M}{Z} = \frac{32\,M}{\pi d^3}. \qquad (c)$$

La contrainte due à l'effort tranchant n'a habituellement qu'une importance secondaire. Elle est maximum sur l'axe neutre où la contrainte normale, due à la flexion, est nulle. Par suite, la contrainte résultante est maximum au point où les contraintes (1) et (2) sont maximums, c'est-à-dire dans les surfaces supérieure et inférieure de l'extrémité encastrée.

La figure 258*b* est une projection de la partie de l'arbre encastrée : elle représente un élément et les contraintes qui s'exercent sur lui. Les équations (72) et (73) permettent de déterminer les contraintes principales dans cet élément :

$$\sigma_{max} = \frac{\sigma_x}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma_x^2 + 4\,\tau^2},$$

ou, à l'aide de (*b*) et (*c*),

$$\sigma_{max} = \frac{1}{2Z}(M + \sqrt{M^2 + M_t^2})$$

$$= \frac{16}{\pi d^3}(M + \sqrt{M^2 + M_t^2}). \qquad (163)$$

De la même manière, en utilisant (73),

$$\sigma_{min} = \frac{1}{2Z}(M - \sqrt{M^2 + M_t^2})$$

$$= \frac{16}{\pi d^3}(M - \sqrt{M^2 + M_t^2}). \qquad (163')$$

On notera que σ_{max} aurait la même valeur dans un cas de flexion simple où le *moment fléchissant équivalent* est

$$M_{équivalent} = \tfrac{1}{2}(M + \sqrt{M^2 + M_t^2}).$$

La contrainte de cisaillement maximum dans le même élément (fig. 258*b*) est, d'après l'équation (34),

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} = \frac{16}{\pi d^3}\sqrt{M^2 + M_t^2}. \qquad (164)$$

Pour les métaux ductiles, constituant généralement les arbres, il est courant, aujourd'hui, d'employer la contrainte de cisaillement maximum afin de déterminer le diamètre de sécurité de l'arbre. Soit τ_W la contrainte d'utilisation en cisaillement, substituons-la à τ_{max} dans l'équation (164), le diamètre est alors

$$d = \sqrt[3]{\frac{16}{\pi \tau_W}\sqrt{M^2 + M_t^2}}. \qquad (165)$$

L'étude ci-dessus est encore valable dans le cas d'un arbre circulaire de diamètre extérieur d et intérieur d_1. Par suite,

$$Z = \frac{\pi(d^4 - d_1^4)}{32\,d} = \frac{\pi d^3}{32}\left[1 - \left(\frac{d_1}{d}\right)^4\right],$$

posons $d_1/d = n$, les équations (163) et (163′) deviennent :

$$\sigma_{max} = \frac{16}{\pi d^3(1 - n^4)}(M + \sqrt{M^2 + M_t^2}), \qquad (166)$$

$$\sigma_{min} = \frac{16}{\pi d^3(1 - n^4)}(M - \sqrt{M^2 + M_t^2}). \qquad (167)$$

La contrainte de cisaillement maximum est

$$\tau_{max} = \frac{16}{\pi d^3(1 - n^4)}\sqrt{M^2 + M_t^2}, \qquad (168)$$

et d devient

$$d = \sqrt[3]{\frac{16}{\pi \tau_W(1 - n^4)}\sqrt{M^2 + M_t^2}}. \qquad (169)$$

Lorsque plusieurs efforts transversaux s'exercent sur l'arbre, on utilisera le moment fléchissant total M et le couple de torsion total M_t en chaque section pour calculer le diamètre nécessaire en ce point, ceci à partir de l'équation (165) ou (169). Lorsque les efforts transversaux s'exerçant sur un arbre ne sont pas parallèles, les moments fléchissants qui leur sont dus s'ajoutent vectoriellement afin de donner le moment fléchissant résultant M. Le problème 3 ci-dessous traite ce cas.

Problèmes

1. Un arbre circulaire de 6,25 cm de diamètre supporte une poulie de 75 cm de diamètre pesant 225 daN (fig. 259). Déterminer la contrainte de

cisaillement maximum dans la section mn, sachant que les tensions horizontales dans les brins supérieur et inférieur sont respectivement égales à 790 daN et 110 daN.

Solution. Dans la section mn :

$$M_t = (790-110)\times 0{,}375 = 255 \text{ m}\cdot\text{daN},$$

$$M = 0{,}150\sqrt{225^2+900^2} = 139{,}2 \text{ m}\cdot\text{daN}.$$

Par suite, d'après (64),

$$\tau_{max} = 6{,}06 \text{ hectobars},$$

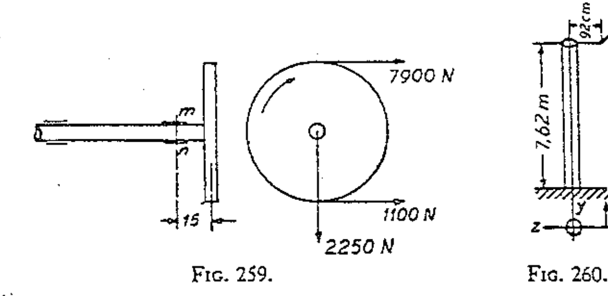


Fig. 259.

Fig. 260.

2. Le tube vertical de la figure 260 est soumis à l'action d'un effort horizontal $P = 113{,}4$ daN s'exerçant à 92 cm de l'axe du tube. Déterminer σ_{max} et τ_{max}, sachant que la longueur du tube est $l = 7{,}62$ m et le module de section $Z = 163{,}87$ cm³.

Réponse. $\sigma_{max} = 5{,}29$ hectobars, $\tau_{max} = 2{,}66$ hectobars.

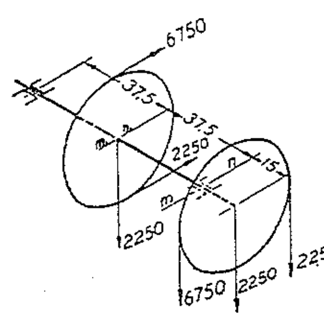


Fig. 261.

3. Déterminer le diamètre nécessaire d'un arbre uniforme (fig. 261) portant deux poulies égales de 75 cm de diamètre et pesant 225 daN chacune. Les efforts horizontaux dans la courroie d'une poulie et verticaux dans la courroie de l'autre, sont représentés sur la figure. La contrainte d'utilisation est $\tau_W = 4{,}2$ hectobars.

Solution. Les sections les moins résistantes sont mn et m_1n_1, qui supportent la totalité du couple de torsion et les plus grands moments fléchissants. Le couple de torsion dans les deux sections est

$$M_t = (675-225)\,0{,}375 = 168{,}75 \text{ m}\cdot\text{daN}.$$

Le moment fléchissant en mn est $(675+225+225)\,0{,}15 = 168{,}75$ m·daN. Le moment fléchissant en m_1n_1, dans le plan horizontal, est

$$\tfrac{1}{4}(675+225)\times 0{,}75 = 168{,}75 \text{ m}\cdot\text{daN}.$$

Le moment fléchissant de la même section, dans le plan vertical, est

$$\frac{225\times 0{,}75}{4} - \frac{1\,125\times 0{,}15\times 0{,}375}{0{,}750} = -42{,}38 \text{ m}\cdot\text{daN}.$$

Le moment fléchissant résultant, dans la section m_1n_1, est

$$M = \sqrt{168{,}75^2+42{,}38^2} = 174 \text{ m}\cdot\text{daN}.$$

Il est plus grand que le moment dans la section mn, c'est donc lui qu'il faut considérer en même temps que le moment M_t calculé plus haut dans l'équation (165) d'où l'on tire

$$d = 6{,}65 \text{ cm}.$$

4. Déterminer le diamètre de la figure 259, sachant que la contrainte d'utilisation en cisaillement est $\tau_W = 4$ hectobars.

5. Déterminer le diamètre extérieur d'un arbre creux sachant que $\tau_W = 4$ hectobars, $d_1/d = 1/3$, les autres dimensions et efforts sont les mêmes que ceux de la figure 261.

6. Résoudre le problème 3 en supposant que la poulie droite est soumise au même couple de torsion mais créé cette fois-ci par un effort horizontal, tangent au contour de la poulie, au lieu des tensions verticales de 675 daN et 225 daN dans la courroie.

11

ÉNERGIE DE DÉFORMATION ET CHOC

66. Énergie de déformation élastique dans le cas de la traction

Nous avons vu, lors de l'étude d'une barre en traction simple (fig. 1), que pendant son allongement, dû à une charge croissant graduellement, la barre travaillait et ce travail se transformait totalement ou partiellement en énergie potentielle de déformation. Si la déformation reste dans les limites d'élasticité, le travail produit est complètement transformé en énergie potentielle, et il est restitué lors d'un déchargement progressif de la barre déformée.

Si l'on désigne par P la charge finale et par δ l'allongement correspondant, le diagramme d'essai de traction obtenu est celui de la figure 262 ; les abscisses représentent les allongements et les ordonnées les charges correspondantes. La charge P_1 désigne une valeur intermédiaire de P et δ_1 l'allongement correspondant. Un accroissement dP_1 de la charge provoque un accroissement $d\delta_1$ de l'allongement. Le travail $P_1 d\delta_1$ produit par P_1 durant l'allongement est figuré par l'aire hachurée. En tenant compte de l'accroissement de la charge P_1, pendant l'allongement, le travail effectué sera représenté par l'aire du trapèze *abcd*. Le travail fourni pendant le processus de sollicitation, c'est-à-dire lorsque la charge croît de O à P, représente la somme de toutes ces aires élémentaires et il est égal à l'aire du triangle OAB. Ce travail représente l'énergie totale U emmagasinée dans la barre pendant la sollicitation. On a donc

Fig. 262.

$$U = \frac{P\delta}{2}. \tag{170}$$

L'équation (1) permet d'établir les deux expressions suivantes de l'énergie de déformation dans une barre :

$$U = \frac{P^2 l}{2AE}, \tag{171}$$

$$U = \frac{AE\delta^2}{2l}. \tag{172}$$

La première de ces équations donne l'énergie de déformation en fonction de la charge P et la seconde donne la même énergie en fonction de l'allongement δ. Pour une barre de dimensions et de module d'élasticité connus, l'énergie de déformation est complètement déterminée par la valeur de l'effort P ou celle de l'allongement δ.

En pratique, l'énergie de déformation par unité de volume w est souvent très importante. Sa valeur, exprimée par les équations (171) et (172), s'écrit alors

$$w = \frac{U}{Al} = \frac{\sigma^2}{2E}, \tag{173}$$

ou

$$w = \frac{E\varepsilon^2}{2}, \tag{174}$$

$\sigma = P/A$ représente la contrainte de traction et $\varepsilon = \delta/l$ l'allongement unitaire.

Pour déterminer la quantité maximum d'énergie de déformation par unité de volume, que l'on peut accumuler dans une barre sans créer de déformation permanente (¹), on substitue la limite élastique du matériau à σ dans l'équation (173). Un acier, dont la limite élastique est 21 hectobars et $E = 21 \times 10^3$ hectobars, donne $w = 10.5$ m·daN/dm³ ; le caoutchouc, dont le module d'élasticité $E = 10{,}5$ bars et dont la limite élastique vaut 21 bars, donne $w = 210$ m·daN/dm³. Il est parfois utile de connaître la valeur maximum de l'énergie de déformation, par unité de poids w_1, qui peut être emmagasinée sans déformation permanente. Cette relation est déterminée par l'équation (173), dans laquelle on rem-

Tableau 4

Matériau	Densité	E hectobars	Limite élastique hectobars	w m·daN/dm³	w_1 m·daN/daN
Acier de construction . . .	7,8	21×10³	20	9,5	1,22
Tôle d'acier . .	7,8	21×10³	84	168	21,6
Cuivre	8,5	11,2×10³	3	0,4	0,047
Chêne	1,0	1,050×10³	3	4,3	4,3
Caoutchouc . .	0,93	105	0,21	210	226

(¹) Cette quantité s'appelle parfois *module de résilience*.

place σ par la limite élastique, et où l'on divise w par le poids spécifique du matériau. Le tableau 4 représente plusieurs valeurs numériques calculées de cette manière.

Ce tableau montre que la quantité d'énergie accumulée dans une masse donnée de caoutchouc est dix fois plus grande que celle emmagasinée dans la tôle d'acier, et environ 170 fois supérieure à celle d'un acier de construction.

Problèmes

1. Une barre d'acier prismatique de 25,4 cm de long et 25,8 cm² d'aire de section est comprimée par un effort $P = 18{,}14$ kN. Déterminer la quantité d'énergie de déformation.

Réponse. $U = 0{,}077$ N · m.

2. Déterminer la quantité d'énergie de déformation du problème précédent lorsque l'aire de la section n'est plus que 1,29 cm².

Réponse. $U = 0{,}143$ N · m.

3. Déterminer la quantité d'énergie de déformation d'une barre d'acier uniforme, verticale, soumise à l'action de son propre poids. Sa longueur est 30 m, sa section 6,25 cm², le poids spécifique de l'acier étant 78 N/dm³.

Réponse. $U = 0{,}089$ N · m.

4. Déterminer la quantité d'énergie de déformation du problème précédent si, en plus de son propre poids, la barre supporte une charge axiale, $P = 4\,500$ N, appliquée à son extrémité.

Réponse. $U = 3{,}17$ N · m.

5. Vérifier la solution du problème de la figure 18, page 20, dans le cas où toutes les barres ont même section et même module, en égalant l'énergie de déformation du système au travail fourni par la charge P.

Solution. Si X représente la force dans la barre verticale, l'allongement de celle-ci est Xl/AE et le travail fourni par P est $\frac{1}{2}\,P(Xl/AE)$. Egalant cette valeur à l'énergie de déformation, nous obtenons

$$\frac{1}{2}P\frac{Xl}{AE} = \frac{X^2 l}{2\,AE} + 2\frac{(X\cos^2\alpha)^2 l}{2\,AE\cos\alpha},$$

d'où

$$X = \frac{P}{1+2\cos^3\alpha},$$

ce qui vérifie la solution trouvée précédemment.

6. Vérifier le problème 2, page 10, en démontrant que le travail fourni par la charge est égal à l'énergie de déformation des deux barres.

7. Une barre d'acier de 75 cm de long et 6,25 cm² de section subit un allongement de 0,5 mm. Trouver l'énergie de déformation.

Réponse. D'après (172),

$$U = \frac{(0{,}5)^2\times 21\times 10^3\times 625}{2\times 750} = 2\,187{,}5\ \text{daN}\cdot\text{mm}$$

ou $21{,}875$ N · m.

8. Comparer les valeurs de l'énergie de déformation des deux barres circulaires des figures 263*a* et *b*, en supposant que les contraintes sont réparties uniformément sur les sections des barres.

Fig. 263.

Solution. L'énergie de déformation de la barre prismatique est

$$U = \frac{P^2 l}{2\,AE}.$$

L'énergie de déformation de la barre entaillée est

$$U_1 = \frac{P^2\frac{1}{4}l}{2\,AE} + \frac{P^2\frac{3}{4}l}{8\,AE} = \frac{7}{16}\,\frac{P^2 l}{2\,AE}.$$

Par suite

$$\frac{U_1}{U} = \frac{7}{16}.$$

Pour une contrainte maximum donnée, la quantité d'énergie emmagasinée dans la barre entaillée est inférieure à celle accumulée dans la barre d'épaisseur uniforme. Il suffit d'une faible quantité de travail pour porter à la limite dangereuse la contrainte de traction d'une barre ayant une rainure très profonde et un grand diamètre extérieur, quand bien même son diamètre, dans la région la plus faible, serait égal à celui de la barre cylindrique (fig. 263*c*).

67. Traction produite par un choc

La figure 264 représente un dispositif simple de production de traction par choc. Le poids W tombe d'une hauteur h sur la butée mn et, pendant le choc, provoque un allongement de la barre verticale AB, fixée à son extrémité supérieure. Si les masses de la barre et de la butée sont petites en comparaison de la masse du corps qui tombe, on obtient une approximation satisfaisante en négligeant la masse de la barre et en supposant qu'il n'y a pas de perte d'énergie pendant le choc. Après avoir heurté la butée mn le corps W

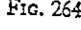


Fig. 264.

continue à descendre, provoquant ainsi un allongement de la barre. En raison de la résistance opposée par la barre, la vitesse du corps diminue jusqu'à devenir nulle. A ce moment, l'allongement de la barre et les contraintes de traction correspondantes atteignent leur maximum, et l'on détermine leurs valeurs en supposant que le travail total fourni par W est transformé en énergie de déformation de la barre (²). Si δ représente l'allongement maximum, le travail fourni par W est $W(h+\delta)$. L'équation (172) donne alors l'énergie de déformation de la barre. Par suite, l'équation de δ est

$$W(h+\delta) = \frac{AE}{2l}\delta^2, \qquad (a)$$

et l'on tire

$$\delta = \delta_{st} + \sqrt{\delta_{st}^2 + \frac{1}{g}\delta_{st}v^2}, \qquad (175)$$

où

$$\delta_{st} = \frac{Wl}{AE}$$

représente l'allongement statique de la barre sous l'action de la charge W et $v = \sqrt{2gh}$ désigne la vitesse de chute du corps au moment où celui-ci heurte la butée. Si la hauteur de chute h est grande par rapport à δ_{st}, l'équation (175) se réduit à

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{g}\delta_{st}v^2}.$$

La contrainte de traction correspondante dans la barre est

$$\sigma = \frac{\delta E}{l} = \frac{E}{l}\sqrt{\frac{1}{g}\delta_{st}v^2} = \sqrt{\frac{2E}{Al}\cdot\frac{Wv^2}{2g}}. \qquad (176)$$

L'expression sous le radical est directement proportionnelle à l'énergie cinétique du mobile, au module d'élasticité du matériau de la barre et inversement proportionnelle au volume Al de celle-ci. Par suite, on peut réduire la contrainte non seulement par un accroissement de la section mais aussi par un accroissement de la longueur de la barre ou une diminution du module E. Cette formule est totalement différente de celle de la traction statique d'une barre où la contrainte est indépendante de l et de E.

(²) En réalité, une partie de l'énergie se dissipe et l'allongement réel sera toujours inférieur à celui calculé ci-dessus.

En remplaçant σ par la contrainte d'utilisation dans (176), on obtient l'équation permettant de calculer une barre soumise à un choc axial :

$$Al = \frac{2E}{\sigma_W^2}\cdot\frac{Wv^2}{2g} = \frac{2EWh}{\sigma_W^2}, \qquad (177)$$

c'est-à-dire, pour un matériau donné, le volume de la barre doit être proportionnel à l'énergie cinétique du mobile afin que la contrainte maximum soit constante.

Considérons à nouveau un cas extrême où la hauteur de chute h est nulle, c'est-à-dire que le solide W est appliqué brusquement sur mn sans vitesse initiale. Bien que dans ce cas-il n'existe pas d'énergie cinétique au début de l'allongement de la barre, le problème reste assez différent de celui de la sollicitation statique de la barre. Dans le cas d'une traction statique on suppose que la charge est appliquée graduellement et, par conséquent, il existe toujours un équilibre entre la charge agissante et les efforts résistants élastiques de la barre. Dans ces conditions la question de l'énergie cinétique de la charge n'intervient pas du tout dans le problème. Lors d'une application soudaine de la charge, l'allongement et la contrainte de la barre sont nuls au début, puis la charge se met à tomber sous l'action de son propre poids. Pendant ce mouvement, l'effort résistant de la barre s'accroît progressivement jusqu'à devenir égal à W lorsque le déplacement vertical du poids est δ_{st}. Mais à ce moment la charge possède une certaine énergie cinétique, acquise durant le déplacement δ_{st}, par suite elle continue de descendre jusqu'à ce que sa vitesse soit annulée par l'effort résistant de la barre. Dans ces conditions, l'allongement maximum est déterminé par l'équation (175), en posant $v = 0$. Par suite,

$$\delta = 2\,\delta_{st}, \qquad (178)$$

c'est-à-dire qu'une charge appliquée brusquement, en raison des conditions dynamiques, produit une flèche deux fois plus grande que celle obtenue lorsque la charge est appliquée graduellement.

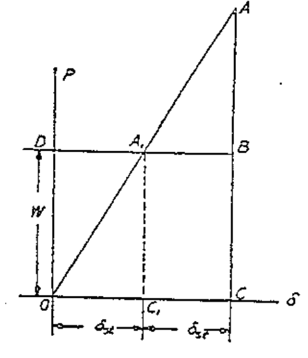


Fig. 265.

La figure 265 représente graphiquement ce résultat. Le segment de droite OA figure le diagramme d'essai de traction de la barre de la figure 264. Et pour un allongement OC, l'aire AOC donne l'énergie de déformation correspon-

dante de la barre. Le segment DB se situe à la distance W de l'axe δ et l'aire $ODBC$ représente le travail effectué par la charge W pendant le déplacement OC. Lorsque δ est égal à δ_{st}, le travail fourni par W est représenté par l'aire du rectangle ODA_1C_1. En même temps, l'énergie emmagasinée dans la barre est donnée par l'aire du triangle OA_1C_1, qui représente la moitié de l'aire du rectangle ODA_1C_1. L'autre moitié de ce travail fourni est transformée en énergie cinétique du mobile. En raison de la vitesse acquise le solide continue son mouvement et ne parvient au repos qu'à la distance $\delta = 2\,\delta_{st}$ de l'origine. En ce point, le travail total fourni par la charge W, représenté par le rectangle $ODBC$, est égal à l'énergie accumulée dans la barre et représentée par le triangle OAC.

L'étude précédente du choc est fondée sur l'hypothèse suivant laquelle la contrainte dans la barre reste dans les limites élastiques. Au-delà de cette limite le problème se complique car l'allongement de la barre n'est plus proportionnel à l'effort de traction. Supposons que le diagramme d'essai de traction ne dépende pas de la vitesse de déformation de la barre (³), l'allongement au-delà du seuil d'élasticité, pendant le choc, se détermine par un diagramme d'essai de traction ordinaire tel que celui de la figure 266. Pour un allongement maximum δ admis, l'aire correspondante $OADF$ donne le travail nécessaire pour produire un tel allongement ; ce travail est égal au travail $W(h+\delta)$ produit par le poids W. Lorsque $W(h+\delta)$ est égal ou supérieur à l'aire totale $OABC$ du diagramme d'essai de traction, la chute du corps provoque la rupture de la barre.

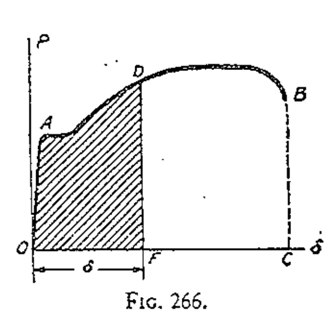


Fig. 266.

Il s'ensuit qu'une modification quelconque de la forme de la barre, ayant pour effet de réduire l'aire totale $OABC$ du diagramme, réduit aussi la capacité de résistance de la barre au choc. Dans le cas des barres rainurées des figures 263*b* et 263*c*, par exemple, l'écoulement plastique du métal se concentre à la rainure ; l'allongement total et le travail nécessaire

(³) Les expériences réalisées sur l'acier ductile montrent que lorsque la vitesse d'allongement est grande, l'allongement limite est plus élevé et la quantité de travail nécessaire pour produire la rupture est plus grande que dans le cas d'un essai statique. Voir N. N. Davidenkoff, *Bull. Polytech. Inst.*, Saint-Petersbourg, 1913 ; Welter, *Z. Metalkunde*, 1924 et M. J. Manjoine, *J. Appl. Mech.*, vol. 11, p. 211, 1944.

pour produire la rupture sont beaucoup plus faibles que dans le cas de la barre cylindrique de la même figure. Les barres rainurées sont très fragiles au choc ; un léger choc peut provoquer la rupture bien que le matériau soit lui-même ductile. Les membrures comportant des trous de rivets ou présentant une variation brusque de section sont aussi fragiles au choc (⁴).

Dans l'étude précédente nous avons négligé la masse de la barre par rapport à celle du mobile W. C'est seulement dans ce cas que l'on peut supposer que l'énergie totale du mobile est transformée en énergie de déformation de la barre. Les conditions réelles de choc sont plus compliquées et lorsque la barre est douée d'une masse appréciable, une partie de l'énergie se dissipe pendant le choc. On sait que lorsqu'une masse W/g, se déplaçant à la vitesse v, heurte en son centre une masse au repos W_1/g et que la déformation au point de contact est plastique, la vitesse finale commune v_a des deux corps est

$$v_a = \frac{W}{W+W_1}\,v. \qquad (b)$$

Dans le cas de la barre de la figure 264 les conditions sont plus compliquées. Pendant le choc, l'extrémité supérieure A est au repos tandis que l'extrémité inférieure B acquiert la vitesse du corps en mouvement W. Par suite, pour calculer la vitesse finale v_a, par l'équation (*a*), on utilise une *masse réduite* au lieu de la masse réelle de la barre. Supposons que la vitesse de la barre varie linéairement suivant sa longueur, on démontre que dans ce cas la masse réduite est égale au tiers de la masse de la barre (⁵). Pour une barre de poids q par unité de longueur, l'équation (*b*) devient

$$v_a = \frac{W}{W+\dfrac{ql}{3}}\,v. \qquad (c)$$

C'est l'expression de la vitesse commune de la charge W et de l'extrémité inférieure de la barre, établie au premier instant du choc. Supposons que la déformation soit plastique sur la surface de contact entre le corps en mouvement et la butée mn (fig. 264), de façon qu'il ne soit pas question de rebondissement, l'énergie cinétique correspondante est

$$\frac{v_a^2}{2g}(W+ql/3) = \frac{Wv^2}{2g}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{ql}{3W}}.$$

(⁴) Voir Hackstroh, *Baumaterialenkunde*, p. 321, 1905 et H. Zimmermann, *Zentr. Bauverwalt.*, p. 265, 1899.

(⁵) Cette solution fut obtenue par H. Cox, *Trans. Cambridge Phil. Soc.*, p. 73, 1849. Voir aussi Todhunter et Pearson, *History of the Theory of Elasticity*, vol. 1, p. 895, Cambridge, 1886.

On substitue cette quantité à

$$\frac{Wv^2}{2g} = Wh$$

dans l'équation (*a*) de manière à tenir compte de la perte d'énergie au premier instant du choc. Par suite, au lieu de (175), on obtient

$$\delta = \delta_{st} + \sqrt{\delta_{st}^2 + \frac{1}{g}\,\delta_{st} v^2 \frac{1}{1 + \dfrac{ql}{3W}}}. \qquad (179)$$

La méthode décrite donne des résultats satisfaisants tant que la masse de la barre est faible par rapport à la masse du corps en mouvement. Autrement, il devient nécessaire de prendre en considération les vibrations longitudinales de la barre [6]. La déformation locale du point de contact durant le choc a été étudiée par J. E. Sears [7] et J. E. P. Wagstaff [8].

Problèmes

1. Un poids de 50 N, fixé à un câble d'acier de 3 mm de diamètre (fig. 267), tombe à partir de A avec l'accélération g. Déterminer la contrainte produite dans le câble lorsque son extrémité supérieure A est immobilisée brusquement. On néglige la masse du câble.

Fig. 267.

Solution. Puisque l'accélération du poids W est égale à g, il n'y a pas de contrainte de traction dans le câble. La contrainte, après immobilisation du câble en A, s'obtient à l'aide de (176), où l'on néglige δ_{st}. Substituons $v^2 = 2gh$ et $l = h$, nous obtenons

$$\sigma = \sqrt{\frac{2\,EW}{A}} = \sqrt{\frac{2 \times 21 \times 10^3 \times 5 \times 4}{3{,}1416 \times 9}} = 172{,}4 \text{ hectobars}.$$

On remarque que la contrainte ne dépend pas de la hauteur de chute h du corps, car l'énergie cinétique de ce dernier croît dans la même proportion que le volume du câble.

2. Un poids $W = 4\,536$ N tombe d'une hauteur $h = 91$ cm sur un pieu vertical en bois de 6 m de long et 30,5 cm de diamètre, fixé à son extrémité.

(6) Les vibrations longitudinales de la barre prismatique pendant le choc ont été étudiées par Navier. Saint-Venant en a donné une résolution plus complète ; voir traduction de Clebsh, *Theorie der Elasticität fester Körper*, note du § 61, 1883. Voir aussi J. Boussinesq, *Application des Potentiels*, p. 508, 1885 et C. Ramsauer, *Ann. Physik*, vol. 30, 1909.

(7) *Trans. Cambridge Phil. Soc.*, vol. 21, p. 49, 1908.

(8) *Proc. Roy. Soc. (London), A.*, vol. 105, p. 544, 1924.

Déterminer la contrainte de compression maximum dans le pieu en supposant que pour le bois $E = 1\,050$ hectobars ; on néglige la masse du pieu et δ_{st}.

Réponse. $\sigma = 1{,}4$ hectobars.

3. Un poids $W = 50$ kN fixé à l'extrémité d'un câble d'acier (fig. 267) tombe à une vitesse constante $v = 1$ m/s. Quelles sont les contraintes produites dans le câble lorsqu'on bloque brusquement son extrémité supérieure ? La longueur libre du câble, au moment de l'impact, est $l = 20$ m, sa section nette est $A = 15$ cm² et $E = 10\,500$ hectobars.

Solution. Négligeons la masse du câble et supposons que l'énergie cinétique du mobile est totalement transformée en énergie potentielle de déformation du câble, l'équation permettant de déterminer l'allongement maximum δ du câble est

$$\frac{AE\delta^2}{2l} - \frac{AE\delta_{st}^2}{2l} = \frac{W}{2g}v^2 + W(\delta - \delta_{st}), \qquad (d)$$

où δ_{st} représente l'allongement statique du câble. Soit $W = AE\delta_{st}/l$, nous obtenons, d'après (*d*),

$$\frac{AE}{2l}(\delta - \delta_{st})^2 = \frac{Wv^2}{2g},$$

d'où l'on tire

$$\delta = \delta_{st} + \sqrt{\frac{Wv^2 l}{AEg}}.$$

Donc, à l'arrêt soudain du mouvement, la contrainte de traction dans le câble augmente dans le rapport

$$\frac{\delta}{\delta_{st}} = 1 + \frac{v}{\delta_{st}}\sqrt{\frac{Wl}{AEg}} = 1 + \frac{v}{\sqrt{g\delta_{st}}}. \qquad (e)$$

L'application numérique donne :

$$\delta_{st} = \frac{Wl}{AE} = \frac{5\,000 \times 20\,000}{1\,500 \times 10\,500} = 6{,}35 \text{ mm}.$$

$$\frac{\delta}{\delta_{st}} = 1 + \frac{1\,000}{\sqrt{10\,000 \times 6{,}35}} = 5{,}0.$$

Par suite,

$$\sigma = 5\,\frac{W}{A} = 16{,}7 \text{ hectobars}.$$

4. Résoudre le problème précédent dans le cas où un ressort, qui s'allonge de 1 cm sous une charge de 5 000 N, est placé entre le câble et la charge.

Solution. $\delta_{st} = 6{,}35 + 10\times 10 = 106{,}35$ mm. Substituons dans (*e*) :

$$\frac{\delta}{\delta_{st}} = 1 + 0{,}9 = 1{,}9\,, \qquad \sigma = 1{,}9\,\frac{W}{A} = 6{,}3 \text{ hectobars}\,.$$

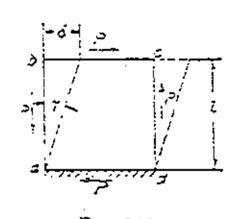
La comparaison avec le résultat du problème précédent montre qu'un ressort incorporé dans le câble et la charge permet de réduire substantiellement la valeur de σ_{max} à l'impact.

5. Déterminer, dans le cas de la figure 264, la hauteur h pour laquelle la contrainte maximum dans la barre, lors du choc, est 21 hectobars. On suppose que $W = 113$ N, $l = 1{,}83$ m, $A = 3{,}23$ cm², $E = 21\times 10^3$ hectobars. On néglige la masse de la barre.

Réponse. $h = 54{,}9$ cm.

68. Énergie de déformation élastique dans le cas du cisaillement et de la torsion

L'énergie de déformation accumulée dans un élément soumis à une contrainte de cisaillement pure (fig. 268) se calcule par la méthode utilisée dans le cas de la traction simple. Si le côté inférieur ad de l'élément est supposé fixé, on ne considère que le travail fourni pendant la déformation due à l'effort P, appliqué sur le côté supérieur bc. Supposons que le matériau obéit à la loi de Hooke, la déviation est proportionnelle à la contrainte de cisaillement et le diagramme représentant cette relation est analogue à celui de la figure 262. Le travail effectué par P et emmagasiné sous forme d'énergie de déformation élastique est alors (voir éq. 170)


FIG. 268.

$$U = \frac{P\delta}{2}. \tag{170'}$$

Puisque

$$\frac{\delta}{l} = \gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{P}{AG},$$

nous obtenons, à partir de (170), les deux équations suivantes :

$$U = \frac{P^2 l}{2AG}, \tag{180}$$

$$U = \frac{AG\delta^2}{2l}. \tag{181}$$

On détermine deux expressions de l'énergie de déformation de cisaillement par unité de volume en divisant ces équations par le volume Al de l'élément :

$$w = \frac{\tau^2}{2G}, \tag{182}$$

$$w = \frac{\gamma^2 G}{2}, \tag{183}$$

$\tau = P/A$ désigne la contrainte de cisaillement et $\gamma = \delta/l$ la déviation. La valeur de l'énergie de cisaillement par unité de volume, qui peut être accumulée dans l'élément sans déformation permanente s'obtient en substituant la limite élastique à τ dans l'équation (182).

On calcule aisément, au moyen de (182), l'énergie accumulée dans un arbre circulaire soumis à la torsion. Si τ_{max} désigne la contrainte de cisaillement maximum sur la surface de l'arbre, alors $\tau_{max}(2r/d)$ représente la contrainte de cisaillement en un point situé à une distance r de l'axe, d est le diamètre de l'arbre. L'énergie par unité de volume en ce point est, d'après (182),

$$w = \frac{2\tau_{max}^2 r^2}{Gd^2}. \tag{a}$$

L'énergie accumulée dans le matériau compris entre les deux surfaces cylindriques de rayon r et $r + dr$ est

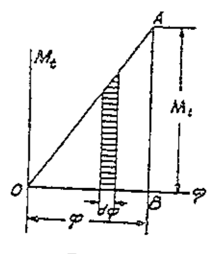
$$\frac{2\tau_{max}^2 r^2}{Gd^2}\, 2\pi l r\, dr\,,$$

où l désigne la longueur de l'arbre. Par suite, l'énergie totale accumulée dans l'arbre est

$$U = \int_0^{d/2} \frac{2\tau_{max}^2 r^2}{Gd^2}\, 2\pi l r\, dr = \frac{1}{2}\,\frac{\pi d^2 l}{4}\,\frac{\tau_{max}^2}{2G}. \tag{184}$$

Cette expression montre que l'énergie totale ne représente que la moitié de ce qu'elle devrait être si tous les éléments de l'arbre étaient soumis à la contrainte de cisaillement maximum τ_{max}.

L'énergie de torsion se détermine aussi à l'aide d'un diagramme de torsion (fig. 269) dans lequel le couple de torsion est porté en ordonnées et l'angle de torsion en abscisses. En deçà de la limite élastique, l'angle de torsion est proportionnel au moment de torsion, d'où le segment de droite oblique OA. La


FIG. 269.

petite aire hachurée dans la figure représente le travail fourni par le couple de torsion durant l'accroissement $d\varphi$ de l'angle de torsion φ. L'aire $OAB = M_t\varphi/2$ représente l'énergie totale accumulée dans l'arbre pendant la torsion. Puisque $\varphi = M_t l/GI_p$, nous obtenons

$$U = \frac{M_t^2 l}{2\,GI_p} \quad \text{ou} \quad U = \frac{\varphi^2 GI_p}{2\,l}. \tag{185}$$

Dans la première de ces deux équations l'énergie est fonction du couple de torsion ; dans la seconde, elle est fonction de l'angle de torsion.

Dans le cas général d'une section de forme quelconque et d'un couple variable suivant la longueur de l'arbre, l'angle de torsion entre deux sections adjacentes est donné par l'équation (voir p. 279) :

$$\frac{d\varphi}{dx}\,dx = \frac{M_t}{C}\,dx\,.$$

L'énergie de déformation de la partie de l'arbre entre deux sections adjacentes est

$$\frac{1}{2}M_t\frac{d\varphi}{dx}\,dx = \frac{C}{2}\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 dx\,,$$

et l'énergie totale de torsion est

$$U = \frac{C}{2}\int_0^l \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 dx = \frac{1}{2\,C}\int_0^l M_t^2\,dx. \tag{186}$$

Problèmes

1. Déterminer le rapport entre la limite élastique en cisaillement et la limite élastique en traction, sachant que la valeur de l'énergie de déformation par unité de volume, qui peut être accumulée sans déformation permanente, est la même dans les deux cas.

Solution. D'après (173) et (182)

$$\frac{\sigma^2}{2\,E} = \frac{\tau^2}{2\,G}\,,$$

d'où

$$\frac{\tau}{\sigma} = \sqrt{\frac{G}{E}}\,.$$

Pour l'acier

$$\tau = \sigma\sqrt{\frac{1}{2{,}6}} = 0{,}62\,\sigma\,.$$

2. Déterminer la flèche d'un ressort hélicoïdal (fig. 253) en utilisant l'expression de l'énergie de déformation de torsion.

Solution. Soit P l'effort s'exerçant suivant l'axe de l'hélice (fig. 253), R le rayon des spires et n le nombre de spires. L'énergie de torsion accumulée dans le ressort est, d'après (185),

$$U = \frac{(PR)^2\,2\,\pi Rn}{2\,GI_p}\,.$$

Egalons cette équation à celle du travail fourni, $P\delta/2$, nous obtenons

$$\delta = \frac{2\,\pi nPR^3}{GI_p} = \frac{64\,nPR^3}{Gd^4}\,,$$

identique à l'équation (162).

3. Le poids d'un ressort hélicoïdal en acier est 45 N. Déterminer l'énergie qu'il peut emmagasiner sans déformation permanente ; la limite élastique de cisaillement est 52 hectobars.

Solution. La valeur de l'énergie par dm³ est, d'après (182),

$$w = \frac{52^2}{2\times 8\,000} = 0{,}169\ \text{daN}\cdot\text{mm/mm}^3 = 1\,690\ \text{N}\cdot\text{m/dm}^3\,.$$

L'énergie par unité de poids du matériau (voir p. 289) est 21,6 daN . m/daN Par suite, l'énergie totale de torsion (*) qui peut être accumulée dans le ressort est

$$\tfrac{1}{2}\times 4{,}5\times 21{,}6 = 48{,}6\ \text{daN}\cdot\text{m}\,.$$

4. Un arbre circulaire plein et un tube mince du même matériau et de même poids sont soumis à une torsion. Dans quel rapport sont les valeurs de l'énergie dans l'arbre et le tube sachant que les deux contraintes maximums sont égales ?

Réponse. $\frac{1}{2}$: 1.

5. Un arbre circulaire en acier, muni d'un volant à une de ses extrémités, tourne à 120 tr/mn. Il est brusquement bloqué à l'autre extrémité. Déterminer la contrainte maximum dans l'arbre, pendant le choc, sachant que la longueur de l'arbre est $l = 1{,}50$ m, son diamètre $d = 5$ cm, le poids du volant $W = 450$ N, son rayon de giration $r = 25$ cm.

Solution. La contrainte est maximum dans l'arbre lorsque l'énergie ciné-

(*) La répartition des contraintes est supposée la même que pour une barre circulaire soumise à la torsion.

tique totale du volant est transformée en énergie de déformation de l'arbre soumis à la torsion. L'énergie cinétique du volant est

$$\frac{Wr^2\omega^2}{2g} = \frac{450\,(0{,}25)^2\,(4\pi)^2}{2\times 9{,}81} = 226{,}4\ \text{N}\cdot\text{m}\,.$$

Remplaçons U par cette valeur dans (184),

$$\tau_{max} = \sqrt{\frac{16\times 8\,000\times 22\,640}{\pi\times 50^2\times 1\,500}} = 15{,}7\ \text{hectobars}\,.$$

6. Deux barres circulaires constituées par le même matériau, ayant même longueur mais des sections A et A_1 différentes, sont soumises au même couple de torsion. Quel est le rapport des valeurs de l'énergie de déformation accumulée dans ces deux barres ?

Réponse. Inversement proportionnel aux carrés des sections.

59. Énergie de déformation élastique dans le cas de la flexion

Commençons par le cas de la flexion pure. Pour une barre prismatique, encastrée à une extrémité, fléchie par un couple M appliqué à l'autre (fig. 270) et s'exerçant dans l'un des plans principaux, nous avons comme déplacement angulaire à l'extrémité libre :

$$\varphi = \frac{Ml}{EI_z}. \qquad (a)$$

FIG. 270.

Ce déplacement est proportionnel au moment fléchissant M, et en utilisant un diagramme identique à celui de la figure 269 on conclut, par un raisonnement similaire, que le travail effectué pendant la flexion par le moment fléchissant M, ou l'énergie emmagasinée dans la barre, est

$$U = \frac{M\varphi}{2}. \qquad (b)$$

A l'aide de l'équation (a) cette énergie s'exprime sous l'une des deux formes :

$$U = \frac{M^2 l}{2\,EI_z}, \qquad (187)$$

$$U = \frac{\varphi^2 EI_z}{2\,l}. \qquad (188)$$

Il est parfois utile de connaître la valeur de l'énergie potentielle exprimée en fonction de la contrainte normale maximum $\sigma_{max} = M_{max}/Z$. Donc,

pour une barre rectangulaire $\sigma_{max} = 6M/bh^2$ ou $M = bh^2\sigma_{max}/6$, et l'équation (187) devient

$$U = \frac{1}{3}\,bhl\,\frac{\sigma_{max}^2}{2\,E}. \qquad (189)$$

Dans ce cas l'énergie totale n'est évidemment que le tiers de la valeur qu'elle aurait si toutes les fibres supportaient la contrainte σ_{max}.

Dans l'étude de la flexion des barres par des forces transversales nous négligerons, au début, l'énergie de déformation de cisaillement. L'énergie accumulée dans un élément de la poutre pris entre deux sections très voisines, distantes de dx, est, d'après les équations (187) et (188),

$$dU = \frac{M^2\,dx}{2\,EI_z} \qquad \text{ou} \qquad dU = \frac{EI_z\,(d\varphi)^2}{2\,dx}.$$

Ici le moment fléchissant M varie avec x et

$$d\varphi = \frac{dx}{r} = \left|\frac{d^2y}{dx^2}\right| dx$$

(voir p. 133). Par conséquent, l'énergie totale accumulée dans la poutre est

$$U = \int_0^l \frac{M^2\,dx}{2\,EI_z} \qquad (190)$$

ou

$$U = \int_0^l \frac{EI_z}{2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 dx\,. \qquad (191)$$

Soit, par exemple, le cantilever AB (fig. 271a). Le moment fléchissant dans une section quelconque mn est $M = -Px$. La substitution dans l'équation (190) donne

$$U = \int_0^l \frac{P^2x^2\,dx}{2\,EI_z} = \frac{P^2 l^3}{6\,EI_z}. \qquad (c)$$

Pour une barre rectangulaire, $\sigma_{max} = 6\,Pl/bh^2$ et l'équation (c) s'écrit sous la forme :

$$U = \frac{1}{9}\,bhl\,\frac{\sigma_{max}^2}{2\,E}. \qquad (c')$$

Ceci indique que la quantité d'énergie qui

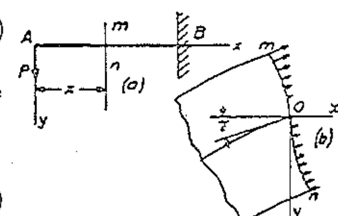


FIG. 271.

peut être accumulée dans une poutre rectangulaire cantilever, sollicitée à son extrémité, sans déformation permanente, est le tiers de celle que produirait la flexion pure de la même barre, et le neuvième de celle de la même barre soumise à la traction simple. Cette considération est importante dans le calcul des ressorts qui doivent absorber sans dommage une quantité d'énergie donnée et, de plus, être aussi légers que possible. On augmente la capacité d'absorption d'énergie d'une cantilever en faisant varier sa section. Par exemple, une cantilever d'*égale résistance*, à section rectangulaire de hauteur constante h (fig. 188), et avec les mêmes valeurs pour P, h, σ_{max}, a une flèche et, par suite, une quantité d'énergie accumulée supérieures de 50 pour cent à celles d'une barre prismatique. En même temps, le poids de la barre d'égale résistance ne représente que la moitié de celui de la barre prismatique de sorte qu'elle peut accumuler trois fois plus d'énergie par unité de poids du matériau.

Revenons à l'équation (c) et égalons l'énergie de déformation au travail effectué par la charge P durant la déformation, on obtient

$$\frac{P\delta}{2} = \frac{P^2 l^3}{6\,EI_z}, \qquad (d)$$

d'où l'on tire la flèche à l'extrémité :

$$\delta = \frac{Pl^3}{3\,EI_z},$$

cette équation est identique à (95).

La flèche additionnelle due au cisaillement peut se déterminer aussi à partir de l'énergie potentielle de déformation. Pour la cantilever de section rectangulaire (fig. 271), la contrainte de cisaillement, à une distance y de l'axe neutre, est (voir éq. 65)

$$\frac{P}{2\,I_z}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right).$$

L'énergie de cisaillement dans un volume élémentaire $b\,dx\,dy$ est donc, d'après (182),

$$\frac{P^2}{8\,GI_z^2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)^2 b\,dx\,dy,$$

et

$$U = \int_0^l \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{P^2}{8\,GI_z^2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)^2 b\,dx\,dy = \frac{P^2 l h^2}{20\,GI_z}. \qquad (e)$$

Cette expression s'ajoute [10] au second membre de (d) ci-dessus pour donner la flèche totale :

$$\frac{P\delta}{2} = \frac{P^2 l^3}{6\,EI_z} + \frac{P^2 l h^2}{20\,GI_z}. \qquad (f)$$

Par conséquent,

$$\delta = \frac{Pl^3}{3\,EI_z}\left(1 + \frac{3}{10}\frac{h^2}{l^2}\frac{E}{G}\right). \qquad (g)$$

Le second terme entre parenthèses représente l'influence des contraintes de cisaillement sur la flèche de la poutre.

En appliquant la méthode du paragraphe 39 sous la condition que l'élément de la section, situé au centre de gravité de l'extrémité encastré, reste vertical (fig. 271b), nous trouvons que la pente additionnelle due au cisaillement est

$$\gamma = \frac{\tau_{max}}{G} = \frac{3}{2}\frac{P}{bhG},$$

la flèche additionnelle est

$$\frac{3}{2}\frac{Pl}{bhG}.$$

Par suite,

$$\delta = \frac{Pl^3}{3\,EI_z} + \frac{3}{2}\frac{Pl}{bhG} = \frac{Pl^3}{3\,EI_z}\left(1 + \frac{3}{8}\frac{h^2}{l^2}\frac{E}{G}\right). \qquad (g')$$

Les équations (g) et (g') ne sont pas identiques. La différence s'explique comme suit : les calculs du paragraphe 39 sont fondés sur l'hypothèse que les sections de la poutre peuvent gauchir librement sous l'action des contraintes de cisaillement. Dans ce cas, la section encastrée est déformée suivant la surface courbe *mon* (fig. 271b) et lors du calcul du travail total effectué sur la cantilever on doit tenir compte non seulement du travail effectué par l'effort P (fig. 271) mais aussi du travail dû aux contraintes s'exerçant sur la section d'encastrement (fig. 271b). Si l'on ne prend pas en considération ce dernier travail, la flèche calculée à partir de l'énergie de déformation coïncide avec celle obtenue au paragraphe 39 et donnée par l'équation (g').

Dans le cas d'une poutre en appui simple sollicitée en son milieu, la section médiane ne gauchit pas en raison de la symétrie. Dans ce cas l'équation (g), si elle est appliquée aux deux moitiés de la poutre, donnera une meilleure approximation, pour la flèche, que l'équation (g'). On peut le constater en comparant les équations approchées (g) et (g') avec la solution plus rigoureuse donnée au paragraphe 39.

---

[10] Cette addition de l'énergie de cisaillement due aux contraintes normales est justifiée par le fait que les contraintes de cisaillement s'exerçant sur un élément (fig. 268) ne modifient pas les longueurs des côtés de celui-ci, et, si des efforts normaux agissent sur ces côtés, ils ne produisent aucun travail pendant la déformation de cisaillement. Par suite, les contraintes de cisaillement ne modifient pas la valeur de l'énergie due à la traction ou à la compression, et les deux types d'énergie s'ajoutent simplement.

Problèmes

1. Une poutre cantilever en bois longue de 1,80 m, de section rectangulaire 200×125 mm, supporte une charge uniforme $q = 300$ daN/m. Déterminer la quantité d'énergie de déformation accumulée si $E = 1\,050$ hectobars.

Réponse.

$$U = \frac{q^2 l^5}{40\,EI_z} = \frac{(0{,}3)^2 \times 1\,800^2}{40 \times 1\,050 \times 125 \times 200^3} = 4\,860\ \mathrm{N \cdot mm}\,.$$

2. Dans quel rapport augmente la quantité d'énergie de déformation du problème 1, si la hauteur de la poutre est 10 cm et sa largeur 20 cm ?

Réponse. L'énergie de déformation s'accroît dans le rapport $20^2 : 10^2$.

3. Deux barres identiques, dont l'une est en appui simple, l'autre à extrémités encastrées, sont soumises à des charges égales, appliquées en leur milieu. Quel est le rapport entre les quantités d'énergie de déformation accumulées ?

Réponse. 4 : 1.

4. Résoudre le problème précédent dans le cas d'une charge uniformément répartie de même intensité q pour les deux barres.

5. Trouver le rapport existant entre les quantités d'énergie de déformation accumulées dans des poutres de section rectangulaire également sollicitées, ayant même longueur et même largeur de section, mais dont les hauteurs sont dans le rapport 2 : 1.

Solution. Pour une charge donnée l'énergie de déformation est proportionnelle à la flèche et celle-ci est inversement proportionnelle au moment d'inertie de la section. En réduisant la hauteur de moitié, la flèche est donc multipliée par 8, et la quantité d'énergie de déformation augmente dans le même rapport.

70. Flèche due à un choc

La déformation dynamique d'une poutre, heurtée par un corps en mouvement W, se calcule par la méthode employée dans le cas d'un choc provoquant une traction (§ 67). Prenons, par exemple, une poutre en appui simple frappée en son milieu (fig. 272) et supposons que la masse de la poutre soit négligeable par rapport à la masse du corps en mouvement, et que la poutre ne soit pas soumise à une contrainte dépassant la limite d'allongement. Dans ces conditions il n'y a pas de perte

d'énergie durant le choc et le travail effectué par le poids W, pendant sa chute, est complètement transformé en énergie de déformation de flexion de la poutre [11]. Soit δ la flèche maximum de la poutre pendant l'impact. Si l'on suppose que la ligne élastique, pendant le choc, a même allure que dans le cas d'une flèche statique, l'effort provoquant une telle flèche est, d'après (90),

$$P = \delta \frac{48\,EI_z}{l^3}. \qquad (a)$$

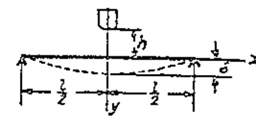


Fig. 272.

L'énergie totale accumulée dans la poutre est égale au travail fourni par l'effort P :

$$U = \frac{P\delta}{2} = \delta^2 \frac{24\,EI_z}{l^3}.$$

Si h désigne, comme auparavant, la hauteur de chute avant l'impact, l'équation permettant de déterminer δ s'écrit :

$$W(h+\delta) = \delta^2 \frac{24\,EI_z}{l^3}, \qquad (b)$$

d'où l'on tire

$$\delta = \delta_{st} + \sqrt{\delta_{st}^2 + \frac{1}{g}\delta_{st} v^2}, \qquad (192)$$

avec

$$\delta_{st} = \frac{Wl^3}{48\,EI_z} \qquad \text{et} \qquad v = \sqrt{2gh}.$$

L'équation (192) est exactement la même que celle obtenue dans le cas où le choc provoquait une traction (éq. 175).

On remarquera que la formule de l'équation reste la même pour tout autre cas de choc, à condition que la flèche au point d'impact soit proportionnelle à l'effort P, exercé en ce point. Si l'on désigne par α le facteur de proportionnalité dépendant de la structure, nous avons

$$\alpha P = \delta \qquad \text{et} \qquad U = \frac{P\delta}{2} = \frac{\delta^2}{2\alpha}.$$

Par suite,

$$W(h+\delta) = \frac{\delta^2}{2\alpha},$$

et puisque $\delta_{st} = W\alpha$, cette relation se réduit à l'équation (192).

[11] Dans ce calcul on néglige la déformation locale de la surface de contact de la charge et de la poutre.

On remarquera aussi que la flèche δ calculée à partir de (192) représente la limite supérieure vers laquelle tend le maximum de la flèche dynamique, lorsqu'il n'y a pas de perte d'énergie durant le choc. Après avoir déterminé la flèche dynamique par l'équation (192), on calcule les contraintes correspondantes en multipliant par δ/δ_{st} les contraintes obtenues dans le cas de l'application statique de la charge W.

Lorsque h est grand par rapport à δ_{st}, ou bien si le choc est dirigé horizontalement, l'équation (192) s'écrit simplement :

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{g}\,\delta_{st} v^2}. \qquad (c)$$

Dans le cas d'une poutre en appui sur ses extrémités et heurtée en son milieu, cette équation donne

$$\delta = \sqrt{\frac{Wv^2}{2g}\,\frac{l^3}{24\,EI_z}}. \qquad (d)$$

Le moment fléchissant maximum est dans ce cas

$$M_{\max} = \frac{Pl}{4} = \frac{\delta \cdot 48\,EI_z}{l^3}\,\frac{l}{4}$$

et

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{Z} = \frac{\delta \cdot 48\,EI_z}{l^3}\,\frac{l}{4Z}.$$

Pour une section rectangulaire, en utilisant (d),

$$\sigma_{\max} \doteq \sqrt{\frac{Wv^2}{2g}\,\frac{18\,E}{lA}}. \qquad (e)$$

Cette expression montre que la contrainte maximum dépend de l'énergie cinétique du mobile et du volume Al de la poutre.

Pour déterminer l'influence de la masse de la poutre sur la flèche maximum, on suppose que la ligne élastique pendant le choc a même allure que dans le cas d'une déformation statique. On démontre alors que la masse réduite de la poutre [12], en appui sur ses extrémités, est $(17/35)(ql/g)$ et que la vitesse commune, qui s'établit au premier moment du choc, est

$$v_a = \frac{W}{W + (17/35)\,ql}\,v.$$

([12]) Voir H. Cox, *loc. cit.*, p. 309.

L'énergie cinétique totale après établissement de la vitesse commune v_a est

$$\frac{v_a^2}{2g}\,[W + (17/35)ql] = \frac{Wv^2}{2g}\,\frac{1}{1 + \dfrac{17}{35}\dfrac{ql}{W}}.$$

Utilisons cette expression au lieu de

$$\frac{Wv^2}{2g} = Wh$$

dans l'équation (b), nous obtenons

$$\delta = \delta_{st} + \sqrt{\delta_{st}^2 + \frac{\delta_{st} v^2}{g}\,\frac{1}{1 + \dfrac{17}{35}\dfrac{ql}{W}}}, \qquad (193)$$

qui tient compte de l'influence de la masse de la poutre sur la flèche δ [13].

Dans le cas d'une poutre cantilever, lorsque le poids W heurte la poutre en son extrémité, la valeur de la masse réduite de la poutre est $\frac{33}{140}\,(ql/g)$. Lorsqu'une poutre en appui simple sur ses extrémités est frappée en un point dont les distances aux appuis sont a et b, la masse réduite est

$$\frac{1}{105}\left[1 + 2\left(1 + \frac{l^2}{ab}\right)^2\right]\frac{ql}{g},$$

et l'on adoptera en conséquence l'équation (193).

Problèmes

1. Une poutre en bois rectangulaire en appui simple, d'une portée de 2,70 m est frappée en son milieu par un poids de 180 N tombant d'une hauteur $h = 30$ cm. Déterminer l'aire de section nécessaire, sachant que la contrainte d'utilisation est $\sigma_w = 70$ bars, $E = 1\,050$ hectobars. On néglige δ_{st} par rapport à h.

([13]) On trouvera plusieurs exemples d'application de cette équation dans la note du Prof. TSCHETSCHE, *Z. Ver. deut. Ing.*, p. 134, 1894. Une théorie plus exacte du choc transversal sur une poutre repose sur l'étude de ses vibrations latérales et de ses déformations locales au point d'impact. Voir la traduction de l'ouvrage de SAINT-VENANT par CLEBSH, *loc. cit.*, p. 537 ; voir aussi *Comp. rend.*, vol. 45, p. 204, 1857 ; et la note de l'auteur dans *Z. Math. u. Phys.*, vol. 62, p. 198, 1913. Des expériences sur des poutres soumises au choc ont été faites en Suisse et s'accordent de façon satisfaisante avec la théorie approchée ci-dessus, voir M. Roš, *Tech. Komm. Verband. Schweiz. Brückenbau- u. Eisenhochbaufabriken*, mars 1922. Voir aussi Z. TUZI et M. NISIDA, *Phil. Mag.*, ser. 7, vol. 21, p. 448 ; R. N. ARNOLD, *Proc. Inst. Mech. Engrs. (London)*, vol. 137, p. 217, 1937 ; et E. H. LEE, *J. Appl. Mech.*, vol. 7, p. 129, 1940.

Solution. Utilisons l'équation (*e*) de la page 308 [14],

$$A = \frac{Wv^2}{2g}\frac{18\,E}{l\sigma_W^2} = 18 \times 300 \frac{18 \times 1\,050}{2\,700 \times (0,7)^2} = 77\,140 \text{ mm}^2 .$$

2. Déterminer dans quel rapport varie l'aire de la section dans le problème précédent lorsque (1) la portée de la poutre passe de 2,70 m à 3,60 m et (2) le poids W augmente de 50 pour cent.

Réponse. (1) L'aire diminue dans le rapport 3 : 4. (2) L'aire augmente de 50 pour cent.

3. Un poids $W = 450$ N tombe de 30 cm au milieu d'une poutre I en appui simple, longue de 3 m. Calculer les dimensions de sécurité lorsque $\sigma_W = 21$ hectobars.

Solution. Négligeons δ_{st} par rapport à h (voir équ. *c*), le rapport entre les flèches dynamique et statique est

$$\frac{\delta}{\delta_{st}} = \sqrt{\frac{v^2}{g\delta_{st}}} = \sqrt{\frac{2h}{\delta_{st}}} .$$

Si l'allure de la ligne élastique durant le choc est identique à celle d'une déformation statique, les contraintes maximums de flexion sont dans le même rapport que les flèches. Par suite,

$$\sqrt{\frac{2h}{\delta_{st}}}\frac{Wl}{4Z} = \sigma_W , \text{ d'où } \frac{Z}{c} = \frac{6EW}{\sigma_W^2}\frac{h}{l} ,$$

dans laquelle Z est le module de section et c la distance de la fibre extrême à l'axe neutre, qui représente dans ce cas la moitié de la hauteur de la poutre. Substituons les valeurs numériques,

$$\frac{Z}{c} = \frac{6 \times 21\,000 \times 45 \times 300}{21^2 \times 3\,000} = 1\,285 \text{ mm}^2 .$$

Le profilé IPN nécessaire a une hauteur de 150 mm (voir appendice).

4. Quelle est la contrainte produite dans la poutre du problème 3 par une charge de 900 N tombant au milieu de celle-ci, d'une hauteur de 15 cm ?

Réponse. $\sigma_{max} = 20,9$ hectobars.

5. Une poutre cantilever de 1,80 m de portée et de section carrée 30×30 cm est frappée à son extrémité par un poids $W = 450$ N tombant d'une hauteur $h = 30$ cm. Déterminer la flèche maximum en tenant compte de la perte d'énergie due à la masse de la poutre.

[14] On néglige la déformation locale à la surface de contact de la charge et de la poutre.

Solution. Négligeons δ_{st} par rapport à h, l'équation analogue à (193) devient

$$\delta = \sqrt{\frac{\delta_{st}v^2}{g}\frac{1}{1 + \frac{33}{140}\frac{ql}{W}}} .$$

Pour $ql = 600 \times 1,8 = 1\,080$ N,

$$\delta = \sqrt{\delta_{st} \cdot \frac{600}{1 + \frac{33 \times 108}{140 \times 45}}} = \sqrt{\frac{383,2 \times 45 \times 1\,800^3 \times 12}{3 \times 1\,050 \times 300^4}} = 6,88 \text{ mm} .$$

6. Une poutre en appui simple aux extrémités est frappée en son milieu par un poids W tombant d'une hauteur h. Négligeant δ_{st} par rapport à h, trouver la valeur du rapport ql/W pour lequel l'influence de la masse de la poutre réduit la flèche dynamique de 10 pour cent.

Réponse. $\frac{ql}{W} = 0,483$.

71. Expression générale de l'énergie de déformation

Dans l'étude des problèmes relatifs à la traction, compression, torsion et flexion, nous avons démontré que l'énergie de déformation peut être représentée dans chaque cas par une fonction du second degré des efforts extérieurs (éq. 171, 180 et 187) ou par une fonction du second degré des déplacements (éq. 172, 181 et 188). Ceci est encore vrai dans le cas général de la déformation d'un solide élastique, sous les réserves suivantes : (1) le matériau obéit à la loi de Hooke et (2) les conditions sont telles que les faibles déplacements, dus à la déformation, n'affectent pas l'action des efforts extérieurs et sont négligeables dans le calcul des contraintes [15]. Avec ces deux restrictions les déplacements d'un système élastique sont des fonctions linéaires des charges extérieures. Si ces charges augmentent dans une certaine proportion, tous les déplacements augmentent dans la même proportion. Considérons un solide soumis à l'action des efforts extérieurs P_1, P_2, P_3, ... (fig. 273) et dont les appuis sont disposés de manière à empêcher son mouvement en tant que corps rigide, les déplacements n'étant dus qu'aux déformations élastiques. Soit

[15] Les problèmes tels que la flexion des barres soumises à des efforts latéraux accompagnés d'une traction ou compression axiale ne satisfont pas à ces conditions et sont exclus de cette étude. Voir à ce sujet le paragraphe 76.

$\delta_1, \delta_2, \delta_3$, ... les déplacements des points d'application des efforts, chacun étant compté dans la direction de l'effort correspondant [16]. Si les efforts extérieurs croissent graduellement de manière à ce qu'ils soient constamment en équilibre avec les efforts élastiques intérieurs résistants, le travail qu'ils produisent pendant la déformation est égal à l'énergie de déformation accumulée dans le corps déformé. La valeur de cette énergie ne dépend pas de l'ordre dans lequel les efforts sont appliqués mais elle est complètement déterminée par leurs grandeurs finales. Supposons que tous les efforts extérieurs P_1, P_2, P_3, ... augmentent simultanément dans le même rapport. Alors, la relation entre chaque effort et le déplacement correspondant peut être représentée par un diagramme analogue à celui de la figure 262 et le travail fourni par tous les efforts P_1, P_2, P_3, ..., égal à l'énergie de déformation accumulée dans le solide, est

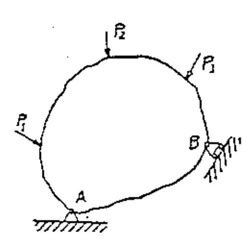


Fig. 273.

$$U = \frac{P_1\delta_1}{2} + \frac{P_2\delta_2}{2} + \frac{P_3\delta_3}{2} + \dots, \tag{194}$$

c'est-à-dire que l'énergie de déformation totale est égale à la demi-somme des produits de chaque effort extérieur par son déplacement correspondant [17]. D'après les hypothèses faites plus haut, les déplacements $\delta_1, \delta_2, \delta_3$, ... sont des fonctions linéaires homogènes des efforts P_1, P_2, P_3, ... La substitution de ces fonctions dans l'équation (194) donne une expression générale de l'énergie de déformation sous la forme d'une fonction homogène du second degré des efforts extérieurs. Si les efforts sont représentés par des fonctions linéaires des déplacements et si ces fonctions sont portées dans (194), on obtient une expression de l'énergie de déformation sous forme d'une fonction du second degré homogène des déplacements.

Nous n'avons pas tenu compte dans l'étude précédente des réactions aux appuis. Le travail fourni par ces réactions durant la déformation est nul, puisque le déplacement d'un appui fixe, tel A (fig. 273), est nul et le déplacement de l'appui mobile B est perpendiculaire à la réaction,

(16) On ne tient pas compte, dans cette étude, des déplacements des mêmes points suivant les directions perpendiculaires.

(17) Clapeyron fut le premier à tirer cette conclusion ; voir Lamé, *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité*, 2e éd., p. 79, 1866.

on néglige les frottements aux appuis. Par conséquent, les réactions n'ajoutent rien à l'expression de l'énergie potentielle (194).

Considérons, comme exemple d'application de l'équation (194), l'énergie accumulée dans un élément cubique soumis à une traction uniforme suivant trois directions perpendiculaires (fig. 54). Si l'arête du cube est égale à l'unité, les efforts de traction sur ses faces sont $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ en valeur absolue et les allongements correspondants sont $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$. Par suite, l'énergie de déformation accumulée dans l'unité de volume est, d'après (194),

$$w = \frac{\sigma_x\varepsilon_x}{2} + \frac{\sigma_y\varepsilon_y}{2} + \frac{\sigma_z\varepsilon_z}{2}.$$

Substituons aux allongements, les valeurs données par l'équation (43) [18], nous obtenons

$$w = \frac{1}{2E}(\sigma_x^2+\sigma_y^2+\sigma_z^2) - \frac{\mu}{E}(\sigma_x\sigma_y+\sigma_y\sigma_z+\sigma_z\sigma_x). \tag{195}$$

On peut aussi utiliser cette expression lorsque certaines contraintes normales sont compressives, dans ce cas elles sont affectées du signe moins.

Si en plus des contraintes normales nous avons affaire à des contraintes de cisaillement s'exerçant sur les faces de l'élément, l'énergie de cisaillement s'ajoute à l'énergie de traction ou compression (voir p. 304), et à l'aide de (182) l'énergie totale accumulée dans l'unité de volume s'exprime par

$$w = \frac{1}{2E}(\sigma_x^2+\sigma_y^2+\sigma_z^2) - \frac{\mu}{E}(\sigma_x\sigma_y+\sigma_y\sigma_z+\sigma_z\sigma_x) + \frac{1}{2G}(\tau_{xy}^2+\tau_{yz}^2+\tau_{zx}^2). \tag{196}$$

Prenons pour second exemple le cas d'une poutre en appui simple sur ses extrémités, sollicitée en son milieu par un effort P et fléchie par un couple M appliqué à l'extrémité A. La flèche au milieu est, d'après (90) et (105),

$$\delta = \frac{Pl^3}{48\,EI} + \frac{Ml^2}{16\,EI}. \tag{a}$$

La pente en A est, d'après (88) et (104),

$$\theta = \frac{Pl^2}{16\,EI} + \frac{Ml}{3\,EI}. \tag{b}$$

(18) Dans ce calcul les variations de température, dues à la déformation, sont pratiquement sans importance. Pour une étude approfondie voir T. Weyrauch, *Theorie elastischer Körper*, p. 163, Leipzig, 1884. Voir aussi *Z. Architek u. Ingenieurw.*, vol. 54, pp. 91 et 277, 1908.

Par suite, l'énergie de déformation de la poutre, égale au travail fourni par l'effort P et le couple M, est

$$U = \frac{P\delta}{2} + \frac{M\theta}{2} = \frac{1}{EI}\left(\frac{P^2l^3}{96} + \frac{M^2l}{6} + \frac{MPl^2}{16}\right). \qquad (c)$$

Cette expression est une fonction homogène du second degré de l'effort et du couple extérieurs. Résolvons les équations (*a*) et (*b*) de M et P et substituons les résultats dans (*c*), on obtient une expression de l'énergie de déformation sous la forme d'une fonction homogène du second degré des déplacements. On notera que lorsque les couples extérieurs s'exercent sur le corps les déplacements correspondants sont les déplacements angulaires des éléments de surface sur lesquels ces couples s'exercent.

72. Théorème de Castigliano

Connaissant les expressions de l'énergie de déformation dans différents cas, on établit une méthode très simple de calcul des déplacements des points d'un solide élastique pendant la déformation. Par exemple, dans le cas de traction simple (fig. 1), l'énergie de déformation, donnée par l'équation (171), est

$$U = \frac{P^2 l}{2AE}.$$

Dérivons cette expression par rapport à P, nous obtenons

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}P} = \frac{Pl}{AE} = \delta .$$

Donc la dérivée de l'énergie de déformation par rapport à la charge donne le déplacement correspondant à la charge, c'est-à-dire le déplacement du point d'application de la charge suivant la direction de la charge. Dans le cas d'une cantilever chargée à son extrémité, l'énergie de déformation est (éq. *c*, p. 303)

$$U = \frac{P^2 l^3}{6EI}.$$

La dérivée de cette expression par rapport à P donne la flèche connue $Pl^3/3EI$ à l'extrémité libre.

Dans le cas de la torsion d'un arbre circulaire l'énergie de déformation est (éq. 185)

$$U = \frac{M_t^2 l}{2GI_p}.$$

La dérivée de cette expression par rapport au couple de torsion est

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}M_t} = \frac{M_t l}{GI_p} = \varphi ,$$

qui représente l'angle de torsion de l'arbre et désigne le déplacement correspondant au couple de torsion.

Lorsque plusieurs charges s'exercent sur un solide élastique, on utilise la même méthode de calcul des déplacements. Par exemple, l'expression (*c*) du paragraphe précédent donne l'énergie de déformation d'une poutre fléchie par une charge P appliquée au milieu et par un couple M à l'extrémité. La dérivée partielle de cette expression, par rapport à P, donne la flèche au droit de la charge et la dérivée partielle, par rapport à M, donne l'angle de rotation de l'extrémité de la poutre où s'exerce le couple M.

Le théorème de Castigliano constitue une expression générale de ces résultats [19]. Si le matériau composant le système suit la loi de Hooke et si les conditions sont telles que l'on peut négliger les faibles déplacements dus à la déformation lors de l'étude de l'action des efforts, l'énergie de déformation d'un tel système est donnée par une fonction homogène du second degré des efforts appliqués (voir § 71). Par suite, la dérivée partielle de l'énergie de déformation, par rapport à l'un quelconque de ces efforts, donne le déplacement correspondant à cet effort (pour les cas particuliers voir § 76). Les termes *effort* et *déplacement* doivent être pris dans leur sens le plus large, c'est-à-dire qu'ils englobent respectivement les *couple* et *déplacement angulaire*.

Considérons le cas général de la figure 273. Supposons que l'énergie de déformation est représentée en fonction des efforts $P_1, P_2, P_3, \ldots$, si bien que

$$U = f(P_1, P_2, P_3, \ldots). \qquad (a)$$

Si l'on donne un faible accroissement $\mathrm{d}P_n$ à une charge quelconque extérieure P_n, l'énergie de déformation s'accroît et sa nouvelle valeur s'exprime par

$$U + \frac{\partial U}{\partial P_n}\mathrm{d}P_n . \qquad (b)$$

[19] Voir la note de CASTIGLIANO, « Nuova teoria intorno dell' equilibrio dei sistemi elastici », *Atti acc. sci. Torino*, 1875. Voir aussi sa *Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques*, Turin, 1879.

Mais la valeur de l'énergie de déformation ne dépend pas de l'ordre dans lequel les charges sont appliquées sur le solide, elle ne dépend que de valeurs finales. On suppose, par exemple, que la charge infinitésimale dP_n a été appliquée en premier lieu et ensuite les charges $P_1, P_2, P_3, \ldots$ La valeur finale de l'énergie de déformation reste la même. La charge dP_n, appliquée en premier lieu, ne produit qu'un déplacement infinitésimal, si bien que le travail correspondant (égal au produit du faible effort par le déplacement correspondant) représente une faible quantité du second ordre que l'on néglige. Appliquons ensuite les charges $P_1, P_2, P_3, \ldots$, on notera que leur influence n'est pas modifiée par la charge dP_n précédemment appliquée [20] et le travail effectué par ces charges est égal à U (éq. *a*), comme précédemment. Mais, toutefois, pendant l'application de ces efforts, la charge dP_n crée un certain déplacement δ_n dans la direction de P_n et produit un travail $(dP_n)\delta_n$. Les deux expressions du travail sont égales. Donc

$$U + \frac{\partial U}{\partial P_n}(dP_n) = U + (dP_n)\,\delta_n,$$

$$\delta_n = \frac{\partial U}{\partial P_n}, \tag{197}$$

et le théorème de Castigliano est ainsi démontré.

Comme application de ce théorème, considérons une poutre cantilever supportant une charge P et un couple M_a à son extrémité (fig. 274). Le moment fléchissant dans la section mn est $M = -Px - M_a$ et l'énergie de déformation d'après (187), s'exprime par

Fig. 274.

$$U = \int_0^l \frac{M^2\,dx}{2EI}.$$

Pour obtenir la flèche δ à l'extrémité de la cantilever il suffit de prendre la dérivée partielle de U par rapport à P [21], ce qui donne

$$\delta = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{1}{EI}\int_0^l M\,\frac{\partial M}{\partial P}\,dx.$$

[20] Ceci découle des restrictions faites à la page 311 à partir desquelles on a obtenu, pour l'énergie de déformation, une fonction homogène du second degré.

[21] Le procédé le plus simple consiste à dériver sous le signe d'intégration puis à intégrer, au lieu de calculer d'abord l'intégrale et dériver ensuite.

Remplaçons M par son expression en fonction de P et M_a, nous avons

$$\delta = \frac{1}{EI}\int_0^l (Px + M_a)\,x\,dx = \frac{Pl^3}{3EI} + \frac{M_a l^2}{2EI}.$$

On obtiendrait la même expression en appliquant l'une des méthodes précédemment décrites : la méthode du moment des aires ou la méthode d'intégration de l'équation (79) de la ligne élastique par exemple.

Pour déterminer la pente à l'extrémité, on calcule la dérivée partielle de l'énergie de déformation par rapport au couple M_a, d'où

$$\theta = \frac{\partial U}{\partial M_a} = \frac{1}{EI}\int_0^l M\,\frac{\partial M}{\partial M_a}\,dx = \frac{1}{EI}\int_0^l (Px + M_a)\,dx = \frac{Pl^2}{2EI} + \frac{M_a l}{EI}.$$

Le signe positif que nous obtenons pour δ et θ indique que la flèche et la rotation de l'extrémité ont respectivement les mêmes directions que l'effort et le couple de la figure 274.

On remarquera que la dérivée partielle $\partial M/\partial P$ désigne le rapport d'accroissement du moment M par rapport à l'accroissement P et peut être figurée par le diagramme du moment fléchissant d'une charge égale à l'unité, comme l'indique la figure 275*a*. La dérivée partielle $\partial M/\partial M_a$

Fig. 275.

se représente de la même manière par le diagramme du moment fléchissant de la figure 275*b*. Utilisons les notations

$$\frac{\partial M}{\partial P} = M'_p \quad \text{et} \quad \frac{\partial M}{\partial M_a} = M'_m,$$

On représente les résultats précédents sous la forme :

$$\delta = \frac{1}{EI}\int_0^l MM'_p\,dx, \qquad \theta = \frac{1}{EI}\int_0^l MM'_m\,dx. \tag{198}$$

Ces équations, calculées pour le cas particulier de la figure 274, sont aussi valables dans le cas général d'une poutre sollicitée de manière quelconque. On peut aussi les utiliser dans le cas de charges réparties.

Considérons, par exemple, le cas d'une poutre uniformément chargée et en appui simple (fig. 276). Calculons la flèche à mi-portée par le

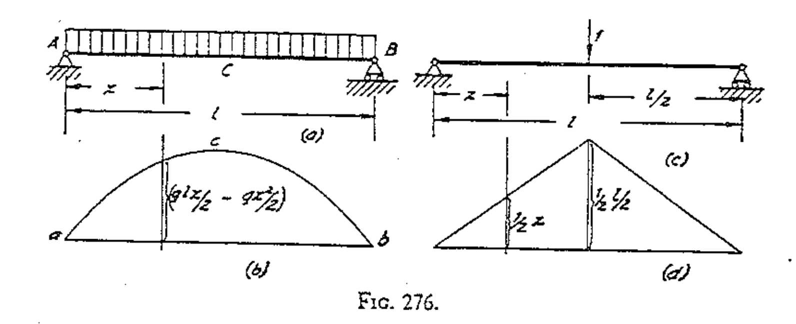


Fig. 276.

théorème de Castigliano. Dans les cas précédents nous avions affaire à des efforts concentrés et des couples, et les dérivées partielles, par rapport à ces efforts et à ces couples, donnaient les déplacements correspondants ainsi que les rotations. Toutefois, dans le cas d'une charge uniforme il n'y a pas d'effort vertical qui, s'exerçant à mi-portée de la poutre, correspondrait à une flèche en ce milieu. Donc, on ne peut opérer comme dans le problème précédent. Toutefois, cette difficulté est aisément surmontée en supposant qu'il existe une charge fictive P, infiniment petite, appliquée au milieu. Une telle charge n'affecte évidemment pas la flèche ou le diagramme du moment fléchissant de la figure 276*b*. En même temps, le taux d'accroissement du moment fléchissant, dû à l'accroissement P, défini par la dérivée partielle $\partial M/\partial P$, se présente comme l'indiquent les figures 276*c* et 276*d*. Avec ces valeurs de M et $\partial M/\partial P$, la valeur de la flèche s'écrit

$$\delta = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{1}{EI_z}\int_0^l M\,\frac{\partial M}{\partial P}\,\mathrm{d}x.$$

Si nous remarquons que M et $\partial M/\partial P$ sont symétriques par rapport au milieu de la portée, nous obtenons

$$\delta = \frac{2}{EI_z}\int_0^{l/2} M\,\frac{\partial M}{\partial P}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{EI_z}\int_0^{l/2}\left(\frac{qlx}{2} - \frac{qx^2}{2}\right)\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{5}{384}\,\frac{ql^4}{EI_z}.$$

S'il est nécessaire de calculer la pente à l'extrémité B de la poutre de la figure 276*a*, à l'aide du théorème de Castigliano, il suffit de supposer qu'un couple M_b infiniment petit est appliqué en B. Un tel couple ne modifie pas le diagramme du moment fléchissant de la figure 276*b*. La dérivée partielle $\partial M/\partial M_b$ est alors représentée sur les figures 277*a* et 277*b*. La rotation cherchée à l'extrémité B de la poutre est

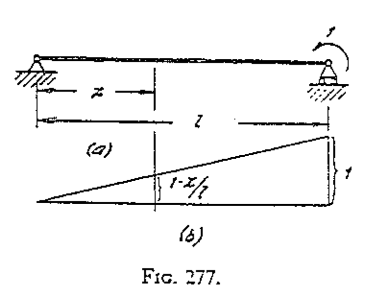


Fig. 277.

$$\theta = \frac{\partial U}{\partial M_b} = \frac{1}{EI_z}\int_0^l M\,\frac{\partial M}{\partial M_b}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{EI_z}\int_0^l\left(\frac{qlx}{2} - \frac{qx^2}{2}\right)\frac{x}{l}\,\mathrm{d}x = \frac{ql^3}{24\,EI_z}.$$

On peut constater que les résultats obtenus à l'aide du théorème de Castigliano coïncident avec ceux obtenus précédemment (p. 136).

Problèmes

1. Déterminer à l'aide du théorème de Castigliano la flèche et la pente à l'extrémité d'une poutre cantilever uniformément chargée.

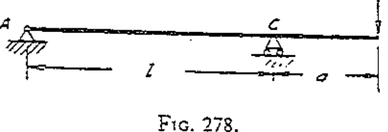


Fig. 278.

2. Déterminer la flèche à l'extrémité B de la poutre en porte-à-faux de la figure 278.

3. Quel est le déplacement horizontal de l'appui B du cadre de la figure 279 sous l'action de l'effort horizontal H ?

Réponse. $\delta_h = \frac{2}{3}\frac{Hh^3}{EI_1} + \frac{Hh^2 l}{EI}$.

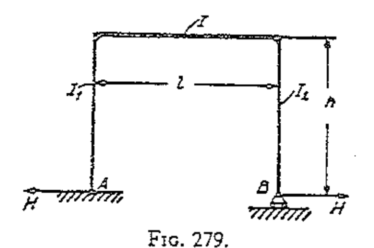


Fig. 279.

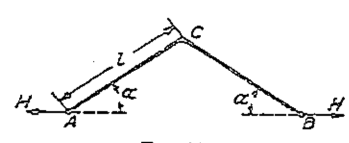


Fig. 280.

4. Déterminer l'accroissement de la distance AB produit par les efforts H (fig. 280), sachant que les barres AC et BC ont les mêmes dimensions et qu'il ne faut tenir compte que de la flexion de ces barres. On suppose que α n'est pas négligeable de sorte que l'influence des flèches sur le moment fléchissant est négligeable.

Réponse. $\delta = \dfrac{2}{3}\dfrac{Hl^3 \sin^2 \alpha}{EI}$.

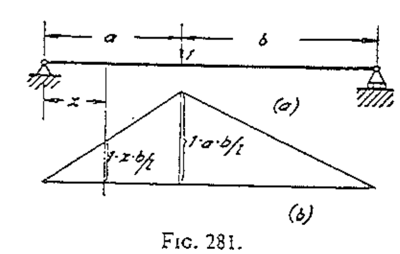


Fig. 281.

5. Déterminer la flèche à une distance a de l'extrémité gauche de la poutre uniformément chargée de la figure 276*a*.

Solution. Appliquons une charge infiniment petite P à une distance a de l'extrémité gauche ; on représente la dérivée partielle $\partial M/\partial P$ sur les figures 281*a* et 281*b*. Utilisons pour M le diagramme parabolique de la figure 276*b*, la flèche cherchée est

$$\delta = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{1}{EI}\int_0^l M\frac{\partial M}{\partial P}\,dx = \frac{1}{EI}\int_0^a \left(\frac{qlx}{2} - \frac{qx^2}{2}\right)\frac{xb}{l}\,dx$$

$$+ \frac{1}{EI}\int_a^l \left(\frac{qlx}{2} - \frac{qx^2}{2}\right)\frac{a(l-x)}{l}\,dx$$

$$= \frac{qab}{24\,EI}(a^2+b^2+3\,ab).$$

Remplaçons a par x et b par $l-x$, ce résultat concorde alors avec l'équation de la ligne élastique déjà obtenue à la page 137.

73. Flèche des treillis

Le théorème de Castigliano s'utilise spécialement pour le calcul des flèches des treillis. Considérons, par exemple, le cas de la figure 282. Toutes les membrures du système sont numérotées et leurs longueurs et aires de section sont portées au tableau 5. L'effort S_i, produit dans une barre quelconque i du système par les charges P_1, P_2, P_3, se calcule à l'aide des équations simples de la statique. Ces efforts sont représentés dans la colonne 4 du tableau 5. L'énergie de déformation d'une barre

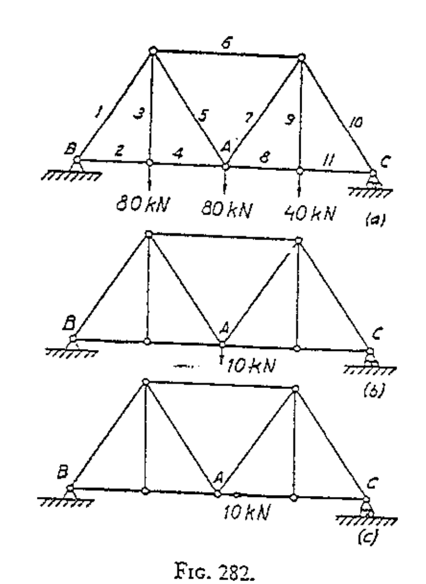


Fig. 282.

Tableau 5. — Données relatives au treillis de la figure 282

1	2	3	4	5	6	7
i	l_i m	A_i mm²	S_i kN	S_i'	$\dfrac{S_iS_i'l_i}{A_i}$	S_i''
1	6,250	3 750	−137,5	−0,625	143,2	0
2	3,750	1 875	82,5	0,375	62,0	1
3	5,000	1 250	80,0	0	0,0	0
4	3,750	1 875	82,5	0,375	62,0	1
5	6,250	1 250	37,5	0,625	117,2	0
6	7,500	2 500	−105,0	−0,750	23,6	0
7	6,250	1 250	62,5	0,625	195,2	0
8	3,750	1 875	67,5	0,375	50,8	0
9	5,000	1 250	40,0	0	0,0	0
10	6,250	3 750	−112,5	−0,625	117,2	0
11	3,750	1 875	67,5	0,375	50,8	0

$$\sum_{i=1}^{i=m}\frac{S_iS_i'l_i}{A_i} = 822 \text{ kN/mm}$$

quelconque i est, d'après l'équation (171), $S_i^2 l_i/2A_iE$. La valeur de l'énergie de déformation dans tout le système est alors

$$U = \sum_{i=1}^{i=m}\frac{S_i^2 l_i}{2A_iE}, \tag{199}$$

la sommation est étendue à toutes les membrures du système, qui dans ce cas sont $m = 11$. Les efforts S_i sont des fonctions des charges P et la flèche δ_n au droit d'une charge P_n est donc, d'après (197),

$$\delta_n = \frac{\partial U}{\partial P_n} = \sum_{i=1}^{i=m} \frac{S_i l_i}{A_i E} \cdot \frac{\partial S_i}{\partial P_n}. \tag{200}$$

La dérivée $\partial S_i/\partial P_n$ désigne le taux d'accroissement de l'effort S_i à l'accroissement de la charge P_n. Numériquement il est égal à l'effort produit dans la barre i par une charge unitaire appliquée dans la position de P_n, et l'on tiendra compte de ceci dans le calcul de la dérivée ci-dessus. Soit S_i' ces dérivées. L'équation des flèches devient

$$\delta_n = \sum_{i=1}^{i=m} \frac{S_i S_i' l_i}{A_i E}. \tag{201}$$

Considérons par exemple la flèche δ_2 correspondant à P_2 en A (fig. 282*a*). Les valeurs S_i' de la colonne 5 du tableau ci-contre s'obtiennent par les équations de la statique à partir des conditions de sollicitation de la figure 282*b*, dans laquelle toutes les charges réelles sont remplacées par une charge verticale de dix kilonewtons appliquée au nœud A. Les valeurs de la colonne 6 sont calculées à partir de celles des colonnes 2 à 5. La sommation et la division par le module $E = 21 \times 10^3$ hectobars donne la fèche en A (éq. 201) :

$$\delta_2 = \frac{82{,}2 \times 1\,000}{21\,000} = 3{,}91 \text{ mm}.$$

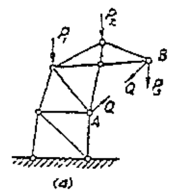
L'étude précédente concerne le calcul des déplacements $\delta_1, \delta_2, \ldots$ correspondant aux efforts extérieurs $P_1, P_2, \ldots$ En étudiant la déformation d'un système élastique, il faut calculer le déplacement d'un point ne supportant aucune charge, ou le déplacement suivant une direction différente de celle de la charge d'un point sollicité. On peut employer dans ce cas la méthode de Castigliano. Il suffit d'appliquer simplement, au point considéré, une *charge imaginaire*, supplémentaire, infiniment petite, Q, dirigée suivant le déplacement cherché, et l'on calcule la dérivée $\partial U/\partial Q$. Dans cette dérivée on annule la charge additionnelle Q et l'on obtient le déplacement cherché. Calculons par exemple, dans le treillis de la figure 282*a*, le déplacement horizontal du point A. On applique un effort horizontal Q en ce point et le déplacement correspondant est

$$\delta_h = \left(\frac{\partial U}{\partial Q}\right)_{Q=0} = \sum_{i=1}^{i=m} \frac{S_i l_i}{A_i E} \cdot \frac{\partial S_i}{\partial Q}, \tag{a}$$

où la sommation est étendue à la totalité des membrures du système. Les efforts S_i de l'équation (*a*) ont même signification que précédemment, car la charge additionnelle Q est nulle, et l'on obtient les dérivées $\partial S_i/\partial Q = S_i''$ représentant les efforts dans les barres du treillis produits par la sollicitation de la figure 282*c*. Ces efforts sont représentés dans la colonne 7 du tableau 5. Substituons ceux-ci dans l'équation (*a*), on trouve que le déplacement horizontal de A est égal à la somme des allongements des barres 2 et 4 :

$$\delta_h = \frac{1}{E}\left(\frac{S_2 l_2}{A_2} + \frac{S_4 l_4}{A_4}\right) = \frac{2 \times 8\,250 \times 3\,750}{21\,000 \times 1\,875} = 1{,}57 \text{ mm}.$$

En étudiant la déformation des treillis il est quelquefois nécessaire de connaître la variation de la distance séparant deux points du système. La méthode de Castigliano permet aussi de résoudre ce problème. Déterminons, par exemple, de quelle quantité δ décroît la distance entre les nœuds A et B (fig. 283*a*), lorsque s'exercent les charges P_1, P_2, P_3. Appliquons à ces nœuds des efforts imaginaires, opposés, Q, comme l'indique la figure. Il découle du théorème de Castigliano que la dérivée partielle $(\partial U/\partial Q)_{Q=0}$ détermine le raccourcissement de la distance AB, dû aux charges P_1, P_2, P_3. Utilisons l'équation (197), ce déplacement est [23]



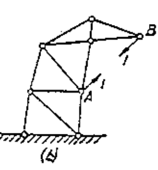


FIG. 283.

$$\delta = \left(\frac{\partial U}{\partial Q}\right)_{Q=0} = \sum_{i=1}^{i=m} \frac{S_i l_i}{A_i E} \frac{\partial S_i}{\partial Q_i} = \sum_{i=1}^{i=m} \frac{S_i l_i}{A_i E} S_i', \tag{202}$$

où S_i représente les efforts produits dans les barres du système par les charges réelles P_1, P_2, P_3 ; les quantités S_i' se déterminent par le cas de charge de la figure 283*b*, où toutes les charges réelles sont remplacées par deux efforts unitaires, opposés, appliqués en A et B ; m désigne le nombre de membrures.

Problèmes

1. Un système composé de deux barres prismatiques d'égale longueur et de même section (fig. 284) supporte une charge verticale P. Déterminer le déplacement vertical du nœud A.

(23) J. C. MAXWELL résolut le premier ce problème, « On the Calculation of the Equilibrium and Stiffness of Frames », *Phil. Mag.*, vol. 27, p. 294, 1864, ou *Scientific Papers*, vol. 1, p. 598, Cambridge, 1890.

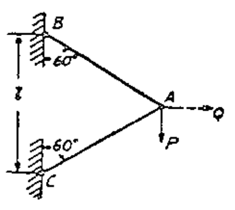


FIG. 284.

Solution. Les efforts de traction dans la barre AB et de compression dans la barre AC sont égaux à P. Par suite, l'énergie de déformation du système est

$$U = 2\frac{P^2 l}{2AE}.$$

Le déplacement vertical de A s'exprime par

$$\delta = \frac{dU}{dP} = \frac{2Pl}{AE}.$$

2. Déterminer le placement horizontal du nœud A du problème précédent.

Solution. Appliquons une charge imaginaire horizontale Q (ligne en tirets sur la figure 284). L'énergie potentielle du système est

$$U = \frac{(P+Q/\sqrt{3})^2 l}{2AE} + \frac{(P-Q/\sqrt{3})^2 l}{2AE}.$$

La dérivée de cette expression par rapport à Q, pour $Q = 0$, donne le déplacement horizontal

$$\delta_h = \left(\frac{\partial U}{\partial Q}\right)_{Q=0} = \left(\frac{2Ql}{3AE}\right)_{Q=0} = 0.$$

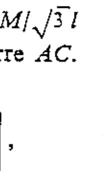
3. Déterminer le déplacement angulaire de la barre AB produit par la charge P de la figure 285.

Solution. Un couple imaginaire M est appliqué au système comme l'indique la ligne en tirets de la figure. Le déplacement correspondant à ce couple est le déplacement angulaire φ de la barre AB dû à la charge P. Les efforts dans les barres sont $P+M/\sqrt{3}l$ dans la barre AB et $-P-2M/\sqrt{3}l$ dans la barre AC. L'énergie de déformation est

$$U = \frac{l}{2AE}\left[\left(P+\frac{M}{\sqrt{3}l}\right)^2 + \left(-P-\frac{2M}{\sqrt{3}l}\right)^2\right],$$

d'où

$$\varphi = \left(\frac{\partial U}{\partial M}\right)_{M=0} = \left(\frac{P\sqrt{3}}{AE} + \frac{5M}{3lAE}\right)_{M=0} = \frac{P\sqrt{3}}{AE}.$$


FIG. 285.

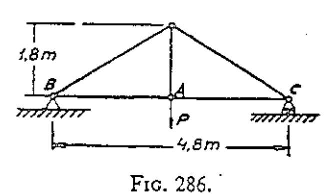


FIG. 286.

4. Déterminer le déplacement vertical du point A et le déplacement horizontal du point C du treillis en acier de la figure 286, sachant que $P = 10$ kN et les aires des sections des barres qui travaillent en compression sont 30 cm² et 12 cm².

74. Application du théorème de Castigliano à la résolution des problèmes statiquement indéterminés

Le théorème de Castigliano est également très utile dans la résolution des problèmes statiquement indéterminés. Commençons par des problèmes dans lesquels les réactions aux appuis sont considérées comme statiquement indéterminées. Soit X, Y, Z, ... les réactions statiquement indéterminées, l'énergie de déformation du système peut être représentée en fonction de ces trois réactions. Pour les appuis fixes et les appuis dont le mouvement est perpendiculaire à la direction des réactions, les dérivées partielles de l'énergie de déformation par rapport aux réactions inconnues doivent être nulles d'après le théorème de Castigliano. Par suite,

$$\frac{\partial U}{\partial X} = 0, \qquad \frac{\partial U}{\partial Y} = 0, \qquad \frac{\partial U}{\partial Z} = 0, \qquad \ldots \tag{203}$$

De cette manière, nous obtenons autant d'équations qu'il y a de réactions statiquement indéterminées.

On peut démontrer que les équations (203) représentent les conditions correspondant à un minimum de la fonction U, d'où il résulte que les valeurs des réactions statiquement indéterminées sont celles qui rendent minimum l'énergie de déformation d'un système. C'est le *principe du moindre travail* (ou travail minimum) appliqué aux réactions surabondantes [24].

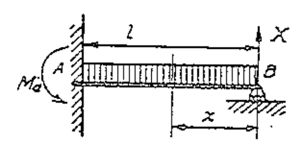


FIG. 287.

Considérons, comme exemple d'application de ce principe, une poutre uniformément chargée, encastrée à une extrémité et libre à l'autre (fig. 287). C'est là un problème comportant une réaction statiquement indéterminée. Soit la

[24] Le principe du moindre travail a été établi par F. MENABREA dans son article « Nouveau principe sur la distribution des tensions dans les systèmes élastiques », *Compt. rend.*, vol. 46, p. 1056, 1858. Voir aussi *ibid.*, vol. 98, p. 714, 1884. CASTIGLIANO a démontré rigoureusement ce principe et en fit la méthode fondamentale de résolution des systèmes statiquement indéterminés. L'application des méthodes de l'énergie de déformation à la mécanique fut développée par O. MOHR, voir son *Abhandlungen, loc. cit.*; par H. MÜLLER-BRESLAU dans son ouvrage *Die neueren Methoden der Festigkeitslehre*, et par F. ENGESSER, « Über die Berechnung statisch unbestimmter Systeme », *Zentr. Bauverwalt.*, p. 606, 1907. Une bibliographie complète du sujet est donnée dans l'article de M. GRÜNING, *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaft*, vol. 4, p. 419.

réaction verticale X, à l'appui droit, cette quantité statiquement indéterminée, on l'obtient par l'équation :

$$\frac{dU}{dX} = 0. \qquad (a)$$

D'après (190), l'énergie de déformation de la poutre est

$$U = \int_0^l \frac{M^2 dx}{2\,EI}, \qquad (b)$$

où

$$M = Xx - \frac{qx^2}{2}.$$

Substituons dans (a), il vient

$$\frac{dU}{dX} = \frac{1}{EI}\int_0^l M\frac{dM}{dX}dx = \frac{1}{EI}\int_0^l \left(Xx - \frac{qx^2}{2}\right)xdx = \frac{1}{EI}\left(X\frac{l^3}{3} - q\frac{l^4}{8}\right) = 0,$$

d'où

$$X = \tfrac{3}{8}ql.$$

On pourrait prendre le couple de réaction M_a à l'extrémité gauche de la poutre comme quantité statiquement indéterminée, au lieu de la réaction X. L'énergie de déformation est alors fonction de M_a. Dans l'équation (b), qui reste encore valable, la valeur du moment fléchissant en une section quelconque est

$$M = \left(\frac{ql}{2} - \frac{M_a}{l}\right)x - \frac{qx^2}{2}.$$

Puisque l'extrémité gauche de la poutre réelle ne subit pas de rotation lorsque la poutre est fléchie, alors la dérivée de l'énergie de déformation par rapport à M_a est nulle. Nous obtenons donc :

$$\frac{dU}{dM_a} = \frac{1}{EI}\int_0^l M\frac{dM}{dM_a}dx = -\frac{1}{EI}\int_0^l \left[\left(\frac{ql}{2} - \frac{M_a}{l}\right)x - \frac{qx^2}{2}\right]\frac{x}{l}dx$$
$$= -\frac{1}{EI}\left(\frac{ql^3}{24} - \frac{M_a l}{3}\right) = 0,$$

d'où l'on tire la valeur absolue du moment

$$M_a = \tfrac{1}{8}ql^2.$$

On peut résoudre par le théorème de Castigliano les problèmes dans lesquels nous considérons les efforts s'exerçant sur les membrures surabondantes comme statiquement indéterminés. Prenons, par exemple, le système représenté sur la figure 18 et qui a déjà été étudié (voir p. 20). Considérons l'effort X dans la barre verticale OC comme statiquement indéterminé, les efforts dans les barres obliques OB et OD sont $(P-X)/2\cos\alpha$. Soit U_1 l'énergie de déformation de ces barres obliques (fig. 288a) et U_2 l'énergie de déformation de la barre verticale (fig. 288b), l'énergie de déformation totale du système est [25]

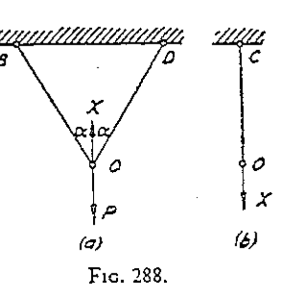


Fig. 288.

$$U = U_1 + U_2 = \left(\frac{P-X}{2\cos\alpha}\right)^2 \frac{l}{AE\cos\alpha} + \frac{X^2 l}{2AE}. \qquad (c)$$

Si δ désigne le déplacement réel vers le bas du nœud O de la figure 18, la dérivée par rapport à X de l'énergie U_1 du système de la figure 288a est alors égale à $-\delta$, puisque l'effort X du système est dirigé en sens inverse du déplacement δ. La dérivée $\partial U_2/\partial X$ est aussi égale à δ, donc

$$\frac{\partial U}{\partial X} = \frac{\partial U_1}{\partial X} + \frac{\partial U_2}{\partial X} = -\delta + \delta = 0. \qquad (d)$$

On remarque que la valeur réelle de l'effort X dans la membrure surabondante rend minimum l'énergie de déformation du système. Remplaçons U par son expression (c) dans l'équation (d), nous obtenons

$$-\frac{(P-X)}{2\cos^2\alpha}\frac{l}{AE\cos\alpha} + \frac{Xl}{AE} = 0,$$

d'où l'on tire

$$X = \frac{P}{1 + 2\cos^3\alpha}.$$

Un raisonnement similaire peut être appliqué à tout système statiquement indéterminé comportant une membrure surabondante, et l'on peut établir que l'effort dans cette membrure est tel qu'il rend minimum l'énergie de déformation du système. Considérons, pour illustrer la méthode de calcul des contraintes dans ce type de systèmes, le cadre de la

[25] On suppose que les barres ont même aire A de section et même module d'élasticité E.

figure 289*a*. Les réactions sont statiquement déterminées, mais lorsqu'on essaie de calculer les efforts dans les barres on constate qu'il existe une membrure surabondante. Soit la barre CD cette membrure. Coupons celle-ci en un point quelconque et appliquons à chaque extrémité F, F_1 un effort X, égal à l'effort dans la barre. Nous arrivons ainsi à un système statiquement déterminé subissant l'effort connu P et, en plus, les efforts

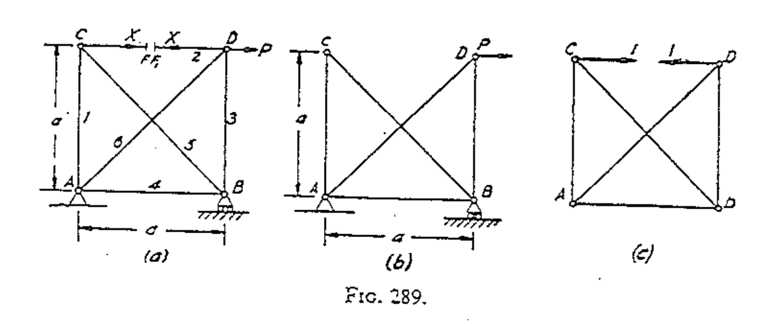


Fig. 289.

inconnus X. On détermine les efforts dans les barres en deux étapes : (1) ceux produits par la charge extérieure P, en supposant $X = 0$ (fig. 289*b*) et représentés par S_i, où i indique le nombre de barres ; (2) ceux produits lorsque la charge P est supprimée et les efforts X remplacés par des efforts unitaires (fig. 289*c*). Ces efforts sont désignés par S_i'. Finalement, l'effort total dans une barre quelconque, lorsque P et X s'exercent simultanément, est

$$S_i = S_i^0 + S_i' X. \qquad (e)$$

L'énergie de déformation totale du système est, d'après (199),

$$U = \sum_{i=1}^{i=m} \frac{S_i^2 l_i}{2 A_i E} = \sum_{i=1}^{i=m} \frac{(S_i^0 + S_i' X)^2 l_i}{2 A_i E}, \qquad (f)$$

où la sommation est étendue à toutes les barres du système y compris la barre CD qui comporte la coupure [26]. On applique alors le théorème de Castigliano et la dérivée de U par rapport à X donne le déplacement des extrémités F et F_1 l'une vers l'autre. En réalité la barre est continue et ce déplacement est nul. Donc

$$\frac{dU}{dX} = 0, \qquad (g)$$

[26] Pour cette barre $S_i^0 = 0$ et $S_i' = 1$.

c'est-à-dire, l'effort X dans la barre surabondante est tel qu'il rend minimum l'énergie de déformation du système. D'après les équations (*f*) et (*g*),

$$\frac{d}{dX} \sum_{i=1}^{i=m} \frac{(S_i^0 + S_i' X)^2 l_i}{2 A_i E} = \sum_{i=1}^{i=m} \frac{(S_i^0 + S_i' X) l_i S_i'}{A_i E} = 0,$$

d'où l'on tire

$$X = - \frac{\sum_{i=1}^{i=m} \frac{S_i^0 S_i' l_i}{A_i E}}{\sum_{i=1}^{i=m} \frac{S_i'^2 l_i}{A_i E}}. \qquad (204)$$

Cette méthode peut s'étendre à un système comportant plusieurs barres surabondantes.

Le principe de moindre travail s'applique aussi dans le cas où les quantités statiquement inconnues sont des couples. Prenons, par exemple, une poutre chargée uniformément et reposant sur trois appuis (fig. 290). Si le moment fléchissant sur l'appui intermédiaire est l'élément statique-

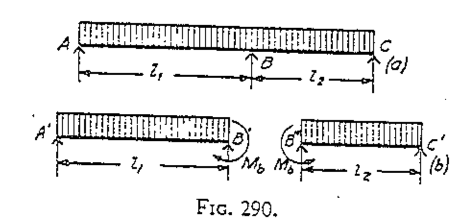


Fig. 290.

ment indéterminé, on coupe la poutre en B et l'on obtient deux poutres en appui simple (fig. 290*b*) soumises aux couples inconnus M_b en plus de la charge uniforme connue q. L'extrémité B' de la poutre $A'B'$ ne subit pas de rotation par rapport à l'extrémité B'' de la poutre $B''C'$, car en réalité (fig. 290*a*) la ligne élastique est continue. Donc

$$\frac{dU}{dM_b} = 0. \qquad (205)$$

De nouveau la valeur de la quantité statiquement indéterminée rend minimum l'énergie de déformation du système.

Problèmes

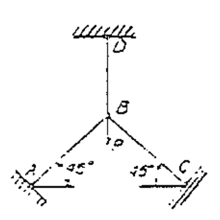


Fig. 291.

1. Une charge verticale P s'exerce sur une barre verticale DB de longueur l et d'aire de section A, et sur deux barres inclinées de longueur l et d'aire de section A_1 (fig. 291). Déterminer les efforts dans les barres ainsi que le rapport A_1/A qui rend égaux, en valeur absolue, les efforts dans les trois barres.

Solution. Le système est statiquement indéterminé. Soit X l'effort de traction dans la barre verticale. Les efforts de compression dans les barres inclinées sont $(P-X)/\sqrt{2}$ et l'énergie de déformation du système s'exprime par

$$U = \frac{X^2 l}{2AE} + \frac{(P-X)^2 l}{2A_1E}.$$

Le principe du moindre travail donne l'équation

$$\frac{dU}{dX} = \frac{Xl}{AE} - \frac{(P-X)l}{A_1E} = 0.$$

d'où l'on tire

$$X = \frac{P}{1 + \frac{A_1}{A}}.$$

Substituons cette expression dans l'équation :

$$X = \frac{1}{\sqrt{2}}(P-X),$$

exprimant la condition d'égalité des efforts dans les trois barres, nous obtenons

$$A_1 = \sqrt{2}A.$$

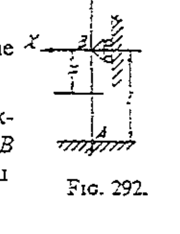


Fig. 292.

2. Déterminer la réaction horizontale X dans le système de la figure 292.

Solution. L'effort inconnu X n'intervient que dans l'expression de l'énergie potentielle de flexion de la partie AB de la barre. Pour cette partie $M = Pa - Xx$, et l'équation du moindre travail donne ([27])

$$\frac{dU}{dX} = \frac{d}{dX}\int_0^l \frac{M^2 dx}{2EI} = \frac{1}{EI}\int_0^l M\frac{dM}{dX}dx = -\frac{1}{EI}\int_0^l (Pa-Xx)x dx$$

$$= \frac{1}{EI}\left(\frac{Xl^3}{3} - \frac{Pal^2}{2}\right) = 0,$$

([27]) On néglige l'influence de l'effort axial sur la flexion de la barre AB.

d'où l'on tire

$$X = \frac{3}{2}P\frac{a}{l}.$$

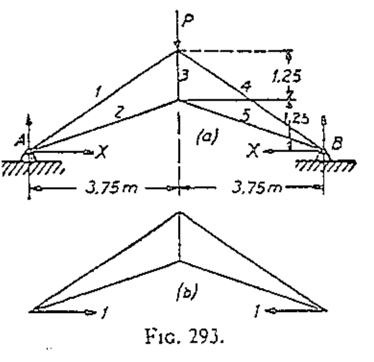


Fig. 293.

3. Déterminer les réactions horizontales X du système de la figure 293. Toutes les dimensions sont portées sur le tableau 6.

Solution. Nous avons, d'après le principe du moindre travail,

$$\frac{dU}{dX} = \frac{d}{dX}\Sigma\frac{S_i^2 l_i}{2A_iE} = \Sigma\frac{S_i l_i}{A_iE}\frac{dS_i}{dX} = 0. \qquad (h)$$

Soit S_i^0 l'effort dans une barre i dû à la charge connue P, en supposant que $X = 0$, et soit S_i' l'effort produit dans la même barre par les efforts unitaires qui remplacent les efforts X (fig. 293*b*). La statique permet de déterminer les valeurs de S_i^0 et S_i'. Elles sont représentées dans les colonnes 4 et 5 du tableau 6. Par suite, l'effort total dans une barre quelconque est

$$S_i = S_i^0 + S_i' X. \qquad (i)$$

Tableau 6. — Données du treillis de la figure 293

	l_i mm	A_i mm²	S_i^0	S_i'	$\frac{S_i^0 S_i' l_i}{A_i}$	$\frac{S_i'^2 l_i}{A_i}$
1	4 507,5	3 125	−1,803P	1,202	−3,124P	2,08
2	3 952,5	1 875	1,581P	−2,108	−7,028P	9,36
3	1 250	1 250	1,000P	−1,333	−1,332P	1,78
4	4 507,5	3 125	−1,803P	1,202	−3,124P	2,08
5	3 952,5	1 875	1,581P	−2,108	−7,028P	9,36

$\Sigma = -21{,}636\ P$; $\Sigma = 24{,}66$.

Substituons dans (*h*), nous trouvons

$$\sum_1^5 \frac{(S_i^0 + S_i'X)\, l_i}{A_iE} S_i' = 0.$$

d'où

$$X = -\frac{\sum_{i=1}^{i=5}\frac{S_i^0 S_i' l_i}{A_i}}{\sum_{i=1}^{i=5}\frac{S_i'^2 l_i}{A_i}}.$$

Les colonnes 6 et 7 donnent les éléments nécessaires au calcul de X. Substituons ces données dans l'équation (j), nous avons

$$X = 0{,}877\,P\,.$$

4. Déterminer l'effort dans la barre horizontale surabondante du système de la figure 294, en supposant que la longueur de cette barre est $l_0 = 7{,}50$ m et que l'aire de la section est égale à A_0. Les autres barres ont les mêmes dimensions que dans le problème 3.

FIG. 294.

Solution. L'effort dans la barre horizontale (barre 0) se calcule d'après l'équation (204). Cette équation est identique à (j) du problème 3, sauf que le système de la figure 294 comporte, en plus, la barre horizontale 0. L'effort produit dans cette barre par la charge P seule ($X = 0$) est nul, c'est-à-dire que $S_0^0 = 0$. L'effort produit par deux efforts égaux à l'unité (fig. 294b) est $S_0' = 1$. Le terme supplémentaire au numérateur de (j) est

$$\frac{S_0^0 S_0' l_0}{A_0} = 0\,.$$

Le terme supplémentaire au dénominateur est

$$\frac{S_0'^2 l_0}{A_0} = \frac{1 \cdot l_0}{A_0} = \frac{7\,500}{A_0}\,.$$

Par suite, à l'aide des données du problème 3,

$$X = \frac{21{,}636\,P}{\dfrac{7\,500}{A_0} + 24{,}66}\,.$$

Prenons, par exemple, $A_0 = 6\,250$ mm²,

$$X = \frac{21{,}636\,P}{1{,}2 + 24{,}66} = 0{,}836\,P\,,$$

inférieur de 4,7 % à la valeur obtenue au problème 3 pour des appuis fixes [28].

Pour une section $A_0 = 6{,}25$ cm², nous trouvons

$$X = \frac{21{,}636\,P}{12 + 24{,}66} = 0{,}590\,P\,.$$

(28) Prenons $A_0 = \infty$, nous obtenons la même condition que pour les appuis fixes.

On remarque que dans les systèmes statiquement indéterminés, les efforts dans les barres dépendent non seulement des charges appliquées mais aussi des aires de leur section.

5. Déterminer les efforts dans les barres du système de la figure 23 en utilisant le principe du moindre travail.

6. Déterminer les efforts dans les barres du système de la figure 295, en supposant que toutes les barres sont constituées par le même matériau et ont mêmes dimensions.

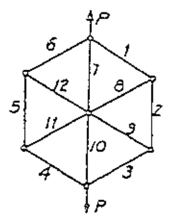


FIG. 295.

Solution. Si l'on retire une barre, les efforts dans les autres se calculent par les formules de la statique. Par suite, le système comporte une barre surabondante. Soit 1 cette barre et X l'effort s'exerçant sur elle. Toutes les barres formant les côtés de l'hexagone subissent la traction X, les barres 8, 9, 11 et 12, travaillent à la compression X, et les barres 7 et 10 sont soumises à l'effort $P - X$. L'énergie de déformation du système est

$$U = 10\,\frac{X^2 l}{2\,AE} + 2\,\frac{(P-X)^2\,l}{2\,AE}\,.$$

D'après l'équation $\mathrm{d}U/\mathrm{d}X = 0$, nous obtenons

$$X = \frac{P}{6}\,.$$

7. Déterminer les efforts dans le système de la figure 289, sachant que les aires des sections de toutes les barres sont égales et que l'effort X dans la diagonale AD est statiquement indéterminé.

Solution. Substituons les données du tableau 7 dans l'équation (204), nous obtenons

$$X = \frac{3 + 2\sqrt{2}}{4 + 2\sqrt{2}}\,P\,.$$

TABLEAU 7. — DONNÉES DU SYSTÈME DE LA FIGURE 289

i	l_i	S_i^0	S_i'	$S_i^0 S_i' l_i$	$S_i'^2 l_i$
1	a	P	$-1/\sqrt{2}$	$-aP/\sqrt{2}$	$a/2$
2	a	P	$-1/\sqrt{2}$	$-aP/\sqrt{2}$	$a/2$
3	a	0	$-1/\sqrt{2}$	0	$a/2$
4	a	P	$-1/\sqrt{2}$	$-aP/\sqrt{2}$	$a/2$
5	$a\sqrt{2}$	$-P\sqrt{2}$	$+1$	$-2aP$	$a\sqrt{2}$
6	$a\sqrt{2}$	0	$+1$	0	$a\sqrt{2}$

$$\Sigma S_i^0 S_i' l_i = \frac{-(3+2\sqrt{2})\,aP}{\sqrt{2}}\,; \qquad \Sigma S_i'^2 l_i = 2\,a\,(1+\sqrt{2})\,.$$

8. Un cadre rectangulaire de section uniforme (fig. 296) est soumis à l'action d'une charge uniformément répartie d'intensité q. Déterminer les moments fléchissants M aux angles.

Réponse. $M = \dfrac{(a^3+b^3)q}{12(a+b)}$.

9. Une charge P est appliquée à deux poutres de même section et disposées en croix, comme le montre la figure 297. Déterminer la pression X entre les poutres.

Réponse. $X = \dfrac{Pl^3}{l^3+l_1^3}$.

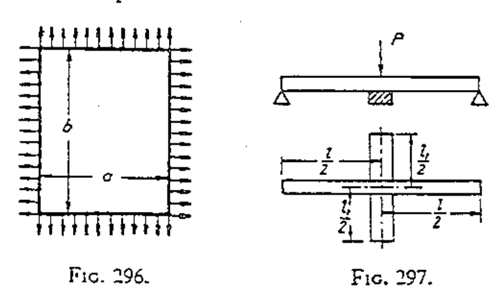


FIG. 296. FIG. 297.

10. Trouver la quantité statiquement indéterminée H du cadre de la figure 170, page 185, en utilisant le principe du moindre travail.

Solution. L'énergie de déformation de flexion du cadre est

$$U = 2\int_0^h \frac{H^2x^2\mathrm{d}x}{2\,EI_1} + \int_0^l \frac{(M_0-Hh)^2\,\mathrm{d}x}{2\,EI}, \qquad (k)$$

où M_0 représente le moment fléchissant variable le long de la barre horizontale AB et calculé comme pour une poutre en appui simple sur ses extrémités. Substituons dans l'équation

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}H} = 0, \qquad (l)$$

nous trouvons

$$\frac{2H}{EI_1}\frac{h^3}{3} + \frac{Hh^2l}{EI} = \frac{h}{EI}\int_0^l M_0\mathrm{d}x. \qquad (m)$$

L'intégrale du second membre désigne l'aire du diagramme triangulaire du moment d'une poutre supportant la charge P. Par suite,

$$\int_0^l M_0\mathrm{d}x = \frac{1}{2}Pc(l-c).$$

Substituons dans (m), nous obtenons pour H la même expression que (114), page 185.

11. Trouver les quantités statiquement indéterminées des cadres des figures 169, 172 et 174 en utilisant le principe du moindre travail.

12. Trouver le moment fléchissant M_1, dans la poutre de la figure 290, en supposant $l_1 = 2l_2$.

75. Théorème réciproque

Commençons par le cas d'une poutre en appui simple (fig. 298*a*) et calculons la flèche en un point D lorsque la charge P s'exerce en C. Cette flèche s'obtient en substituant d à x dans l'équation (86), d'où

$$(y)_{x=d} = \frac{Pbd}{6\,l}(l^2-b^2-d^2).$$

On remarque que cette expression ne varie pas si l'on permute b et d, ceci prouve que pour le cas de la figure 298*b* la flèche en D_1 est la même que celle en D dans le cas de la figure 298*a*. D'après la figure 298*b* nous déduisons la figure 298*c* en faisant subir à la poutre une simple rotation

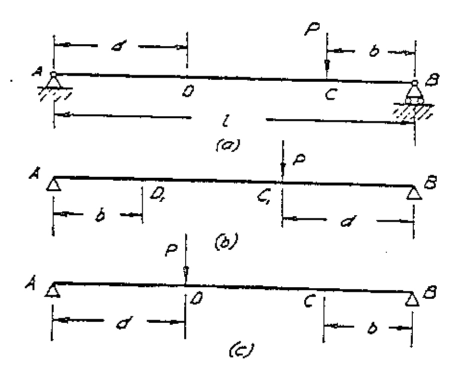


FIG. 298.

de 180 degrés qui a pour effet d'amener le point C_1 en coïncidence avec D et le point D_1 avec le point C. Par suite, la flèche en C de la figure 298*c* est égale à la flèche en D de la figure 298*a*. Ce qui signifie, si la charge P est déplacée de C à D, que la flèche comptée en D dans le premier cas de charge s'obtient en C dans le second cas. C'est là un cas particulier du *théorème réciproque*.

Pour établir le théorème dans sa forme générale (29), nous considérons un corps élastique (fig. 299) sollicité suivant deux directions différentes et reposant sur des appuis tels que tout déplacement, en tant que corps rigide, soit impossible. Dans le premier état de contrainte, les forces appliquées sont P_1 et P_2, dans le second état P_3 et P_4. Les déplacements des points d'application suivant les directions des charges sont $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$

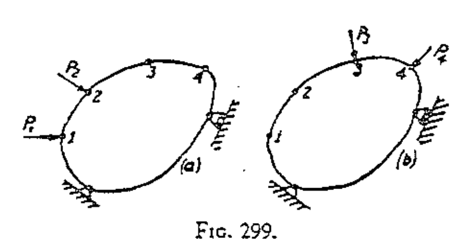


Fig. 299.

dans le premier état et $\delta'_1, \delta'_2, \delta'_3, \delta'_4$ dans le second état. D'après le théorème réciproque, le travail effectué par les forces du premier état multipliées par les déplacements correspondants du second état est égal au travail effectué par les forces du second état multipliées par les déplacements correspondants du premier état. Ceci s'exprime par

$$P_1\delta'_1 + P_2\delta'_2 = P_3\delta_3 + P_4\delta_4 . \tag{206}$$

Pour démontrer ce théorème considérons l'énergie de déformation du corps lorsque toutes les forces $P_1, \ldots, P_4$ s'exercent simultanément et utilisons le fait que la valeur de cette énergie ne dépend pas de l'ordre d'application des forces mais uniquement des valeurs finales des forces. Supposons, dans le premier cas de charge, que l'on applique les forces P_1 et P_2, ensuite les forces P_3 et P_4. L'énergie de déformation accumulée pendant l'application de P_1 et P_2 est

$$\frac{P_1\delta_1}{2} + \frac{P_2\delta_2}{2} . \tag{a}$$

(29) J. C. Maxwell a obtenu un cas particulier de ce théorème, *loc. cit.*, p. 338. Le théorème est dû à E. Betti, *Nuovo cimento*, ser. 2, vol. 7 et 8, 1872. Lord Rayleigh a énoncé ce théorème sous une forme plus générale, *Proc. London Math. Soc.*, vol. 4, 1873 ; ou *Scientific Papers*, vol. 1, p. 179. Diverses applications de ce théorème, à la résolution de problèmes de mécanique, ont été effectuées par O. Mohr et H. Müller-Breslau, *loc. cit.*, pp. 340 et 341.

Appliquons alors P_1 et P_2, le travail effectué par ces deux forces est

$$\frac{P_3\delta'_3}{2} + \frac{P_4\delta'_4}{2} . \tag{b}$$

On notera, toutefois, que durant l'application de P_3 et P_4, les points d'application des forces précédentes P_1 et P_2 se déplacent de δ'_1 et δ'_2. Par suite, P_1 et P_2 effectuent le travail

$$P_1\delta'_1 + P_2\delta'_2 . \;(^{30}) \tag{c}$$

Donc l'énergie de déformation totale accumulée dans le corps est, en sommant (*a*), (*b*), (*c*),

$$U = \frac{P_1\delta_1}{2} + \frac{P_2\delta_2}{2} + \frac{P_3\delta'_3}{2} + \frac{P_4\delta'_4}{2} + P_1\delta'_1 + P_2\delta'_2 . \tag{d}$$

Appliquons, dans le second cas de charge, les forces P_3 et P_4 en premier lieu, puis ensuite, P_1 et P_2. Alors, en répétant le raisonnement ci-dessus, nous obtenons

$$U = \frac{P_3\delta'_3}{2} + \frac{P_4\delta'_4}{2} + \frac{P_1\delta_1}{2} + \frac{P_2\delta_2}{2} + P_3\delta_3 + P_4\delta_4 . \tag{e}$$

Remarquons que les expressions (*d*) et (*e*) représentent la même quantité d'énergie, nous obtenons l'équation (206) du théorème réciproque. Ce théorème s'applique à un nombre quelconque de forces et également à des couples, ou simultanément à des forces et des couples. Dans le cas d'un couple, l'angle de rotation correspondant est considéré comme étant le déplacement.

Dans le cas particulier où s'exerce une force unique P_1 dans le premier état de contrainte et une force unique P_2 dans le second état, l'équation (206) s'écrit (31) :

$$P_1\delta'_1 = P_2\delta_2 . \tag{207}$$

Si $P_1 = P_2$, alors $\delta'_1 = \delta'_2$, c'est-à-dire que le déplacement, dû à P_1, du point d'application de la force P_2 dans la direction de cette force est égal au déplacement, produit par P_2, du point d'application de P_1 suivant la

(30) Ces expressions ne sont pas divisées par 2, car les forces P_1 et P_2 restent constantes durant le temps où leurs points d'application subissent les déplacements δ'_1 et δ'_2.

(31) Ce résultat, démontré par J. C. Maxwell, est désigné fréquemment par l'expression *théorème de Maxwell.*

direction de P_1. Nous avons déjà donné la vérification de cette conclusion dans le cas particulier de la poutre représentée sur la figure 298.

Considérons à nouveau comme autre exemple, la flexion d'une poutre en appui simple. Dans le premier état de charge, la flexion est créée par une charge P appliquée à mi-portée et, dans le second état, par un couple M appliqué à l'extrémité. La charge P produit la pente $\theta = Pl^2/16EI$ à l'extrémité. Le couple M, à l'extrémité, produit la flèche $Ml^2/16EI$ au milieu. L'équation (207) devient

$$P\frac{Ml^2}{16\,EI} = M\frac{Pl^2}{16\,EI}.$$

Le théorème réciproque est très utile dans les problèmes de recherche de la position la plus défavorable des charges mobiles sur un système hyperstatique. La figure 300 en fournit un exemple qui représente une poutre encastrée à une extrémité, en appui simple sur l'autre et supportant une charge concentrée P. Le problème consiste à déterminer la variation de la réaction X sur l'appui gauche, lorsque la distance x, de la charge à cet appui, varie. Considérons la *condition réelle* de la poutre (fig. 300*a*) comme premier état de contrainte.

Fig. 300.

Le second, ou état fictif, est représenté sur la figure 300*b*. La charge extérieure et le support surabondant sont supprimés et une force unitaire, dirigée vers le haut, remplace la réaction inconnue X. Ce second état de contrainte est statiquement indéterminé et la ligne élastique correspondant est connue (voir ép. 97, p. 145). Si l'on prend les axes de coordonnées comme l'indique la figure 300*b*,

$$y = \frac{1}{6\,EI}(l-x)^2\,(2\,l+x)\,. \qquad (f)$$

Soit δ la flèche à l'extrémité et y la flèche à la distance x de l'appui gauche. Par suite, en appliquant le théorème réciproque, le travail fourni par les forces du premier état multipliées par les déplacements correspondants du second état est

$$X\delta - Py\,.$$

Seule la force unitaire sur l'extrémité [32] intervient dans le calcul du

[32] Les réactions à l'extrémité encastrée ne sont pas prises en considération car le déplacement correspondant est nul et le travail correspondant disparaît.

travail fourni par les forces du second état, et le déplacement correspondant du point A, dans le premier état, est nul. Par conséquent, le travail est nul et le théorème réciproque donne

$$X\delta - Py = 0\,,$$

d'où

$$X = P\frac{y}{\delta}\,. \qquad (g)$$

On constate que lorsque la charge P se déplace sur la poutre de la figure 300*a*, la réaction X est proportionnelle aux valeurs correspondantes de y dans la figure 300*b*. Par suite, la ligne élastique du second état (éq. *f*) donne une image complète de la manière dont X varie avec x. Cette courbe est appelée *ligne d'influence* relative à la réaction X [33].

Lorsque plusieurs charges s'exercent simultanément sur la poutre de la figure 300*a*, l'utilisation de l'équation (*g*) et de la méthode de superposition donne

$$X = \frac{1}{\delta}\sum P_n y_n\,,$$

où y_n désigne l'ordonnée de la ligne d'influence correspondant au point d'application de la charge P_n, et la sommation est étendue à l'ensemble des charges.

Problèmes

1. Construire les lignes d'influence relative aux réactions des appuis de la poutre sur trois appuis (fig. 301).

Solution. Pour obtenir la ligne d'influence de l'appui intermédiaire, l'état réel de contrainte de la figure 301*a* est pris comme premier état. Le second état est indiqué sur la figure 301*b*, où P est supprimé et la réaction X de l'appui intermédiaire est remplacée par une force unitaire s'exerçant vers le haut. Ce second état de contrainte est statiquement indéterminé et la ligne élastique est connue (éq. 86 et 87, p. 139), par suite, on détermine les flèches δ et y. Le travail fourni par les

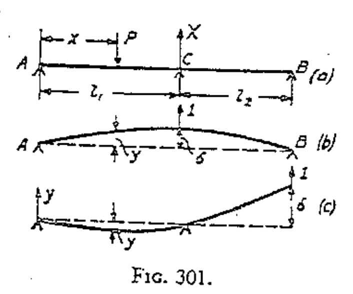


Fig. 301.

[33] L'emploi de maquette pour la détermination des lignes d'influence a été développé par G. E. Beggs, *J. Franklin Inst.*, 1927.

forces du premier état avec les déplacements du second état est alors

$$X\delta - Py\,.$$

Le travail des forces du second (force égale à l'unité) avec les déplacements correspondants du premier état (flèche nulle en C) est nul. Donc,

$$X\delta - Py = 0\,, \qquad X = P\frac{y}{\delta}\,.$$

La ligne élastique du second état précise l'allure de la ligne d'influence relative à la réaction X. Pour obtenir la ligne d'influence de la réaction en B, on considère le second état de contrainte comme l'indique la figure 301*c*.

2. Déterminer la réaction en B à l'aide de la ligne d'influence du problème précédent, sachant que la charge P se situe au milieu de la première travée ($x = l_1/2$), figure 301*a*.

Réponse. La réaction est dirigée vers le bas et est égale à

$$\frac{3P}{16}\,\frac{l_1^2}{l_2^2 + l_2 l_1}\,.$$

3. Trouver la ligne d'influence du moment fléchissant sur l'appui intermédiaire C de la poutre sur trois appuis (fig. 302). Calculer, à l'aide de cette ligne d'influence le moment fléchissant M_c lorsque la charge P se situe au milieu de la seconde travée.

Solution. Le premier état de contrainte représente le cas réel (fig. 302*a*) avec un moment fléchissant intérieur M_c s'exerçant sur la section C. Pour le second état, on supprime P, on coupe la poutre en C et l'on remplace M_c par deux couples égaux et opposés (fig. 302*b*). Ce cas est statiquement indéterminé. Les angles θ_1 et θ_2 sont donnés par l'équation (104) et la flèche y par l'équation (105). La somme des angles $\theta_1+\theta_2$ représente le déplacement dans le second état, correspondant au moment fléchissant M s'exerçant dans le premier état. Le travail effectué par les forces du premier état avec les déplacements correspondants du second état est [24]

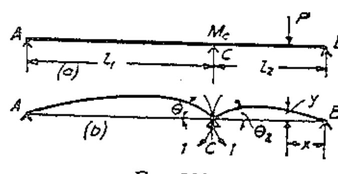


Fig. 302.

$$M_c(\theta_1+\theta_2) - Py\,.$$

Le travail effectué par les forces du second état avec les déplacements du premier état est nul puisqu'il n'existe pas de coupure à l'appui C dans le cas

[24] On suppose que le moment fléchissant M_c produit une ligne élastique concave vers le bas.

réel, et le déplacement correspondant aux deux couples unitaires du second état est nul. Par suite,

$$M_c(\theta_1+\theta_2) - Py = 0$$

et

$$M_c = P\frac{y}{\theta_1+\theta_2}\,. \tag{h}$$

On constate que lorsque la charge P change de position, le moment fléchissant M_c varie dans le même rapport que la flèche y. Par suite, les lignes élastiques du second état représentent l'allure de ligne d'influence de M_c. Remarquant que

$$\theta_1+\theta_2 = \frac{l_1+l_2}{3\,EI}$$

et que la flèche au milieu de la seconde travée est

$$(y)_{x=l_2/2} = \frac{1\cdot l_2^2}{16\,EI}\,,$$

le moment fléchissant sur l'appui C, lorsque la charge P se situe au milieu de la seconde travée, est, d'après (h),

$$M_c = \frac{3}{16}\cdot\frac{Pl_2^2}{l_1+l_2}\,.$$

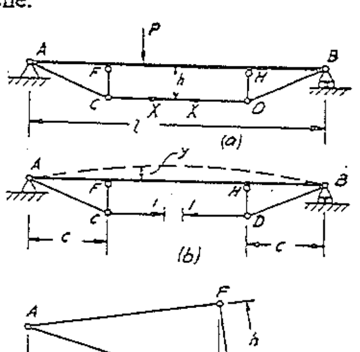
Le signe positif de M_c indique que le moment a le sens indiqué sur la figure 302*b*. Suivant la règle générale du signe des moments (fig. 63), on considère alors que M_c est un moment fléchissant négatif.

4. Trouver la ligne d'influence du moment fléchissant à l'extrémité encastrée B de la poutre AB (fig. 300), et calculer ce moment lorsque la charge se situe à la distance $x = l/3$ de l'appui gauche.

Réponse. $M_b = -\frac{4}{27}Pl$.

5. Construire la ligne d'influence des réactions horizontales H du cadre de la figure 170*a* lorsque la charge P se déplace sur la barre AB.

Réponse. La ligne d'influence a la même allure que la ligne élastique de la barre AB, pour le cas de charge de la figure 169*c*.



6. Construire la ligne d'influence de la force X située dans la barre horizontale CD de la figure 303*a* lorsque P se déplace sur la poutre AB. Calculer X lorsque la charge se trouve au milieu. Les déplacements, dus à l'allongement et à la contraction de la barre, sont négligés et l'on ne tient compte que du déplacement dû à la flexion de la poutre AB.

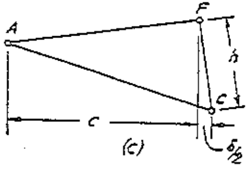


Fig. 303.

Solution. La condition réelle (fig. 303*a*) est prise comme premier état de contrainte. Dans le second état on retire P et les forces X sont remplacées par des forces unitaires (fig. 303*b*). A cause de ces forces, des pressions verticales dirigées vers le haut, égales à $(1 \cdot h)/c$, sont transmises à la poutre AB aux points F et H, et la poutre se déforme comme l'indique la ligne en tirets. Si y désigne la flèche de la poutre au point correspondant à la charge P, et δ le déplacement des points C et D l'un vers l'autre dans le second cas, le théorème réciproque donne

$$X\delta - Py = 0 \qquad \text{et} \qquad X = P\frac{y}{\delta}. \tag{i}$$

Par suite, la ligne élastique de la poutre AB dans le second état représente la ligne d'influence cherchée. La flexion de la poutre, soumise à deux charges disposées symétriquement, est étudiée au problème 1, page 153. Substituons $(1 \cdot h)c$ à P dans les formules obtenues pour cet exemple, on obtient les flèches de la poutre en F et au milieu :

$$(y)_{x=c} = \frac{ch}{6EI}(3l - 4c) \qquad \text{et} \qquad (y)_{x=l/2} = \frac{h}{24EI}(3l^2 - 4c^2).$$

Considérons alors la rotation du triangle AFC (fig. 303*c*) comme étant celle d'un corps rigide, le déplacement horizontal du point C est égal au déplacement vertical du point F multiplié par h/c. Donc

$$\delta = 2\frac{h}{c}(y)_{x=c} = \frac{h^2}{3EI}(3l - 4c).$$

Substituons cette expression et celle de la flèche au milieu dans l'équation (i), nous obtenons

$$X = \frac{P}{8h}\frac{3l^2 - 4c^2}{3l - 4c}.$$

7. Déterminer la ligne d'influence de la force dans la barre CD du système de la figure 304. On néglige les déplacements dus aux contractions et aux élongations, et l'on ne tient compte que de la flexion de la poutre AB.

Réponse. La ligne d'influence est la même que pour la réaction d'appui intermédiaire de la poutre sur trois appuis (voir problème 1, p. 339).

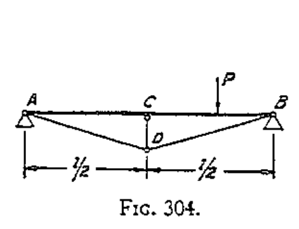


Fig. 304.

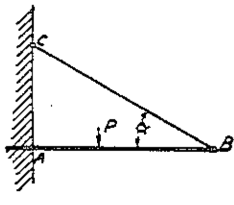


Fig. 305.

8. Construire la ligne d'influence de la barre BC qui supporte la poutre AB (fig. 305). Trouver la force dans BC lorsque P se trouve au milieu.

Réponse. Négligeons les déplacements dus à l'allongement de la barre BC et à la contraction de la poutre AB, la force dans BC est alors $\frac{1}{16}$ $(P/\sin \alpha)$.

76. Cas particuliers

Dans l'établissement du théorème de Castigliano et du théorème réciproque, l'on a supposé que les déplacements dus à la déformation sont proportionnels aux charges s'exerçant sur le système élastique. Dans certains cas, les déplacements ne sont plus proportionnels aux charges, bien que le matériau composant le corps obéisse à la loi de Hooke. Ce phénomène se produit toujours lorsque les déplacements dus aux déformations sont pris en considération dans l'étude de l'action des charges extérieures. Dans ce cas, l'énergie de déformation n'est plus qu'une fonction du second degré et le théorème de Castigliano n'est plus valable.

Considérons, pour expliquer cette limitation, un cas simple où seule une force P s'exerce sur un système élastique. Supposons d'abord que le déplacement δ est proportionnel à la force correspondante P, comme l'indique le segment de droite OA de la figure 306*a*. Par suite, l'aire du triangle OAB

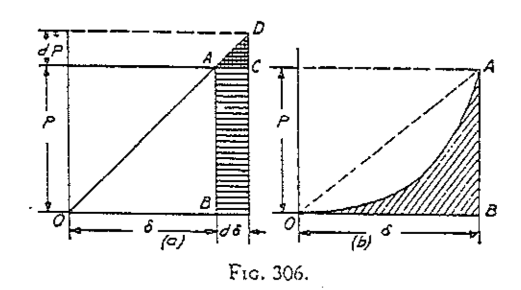


Fig. 306.

représente l'énergie de déformation accumulée dans le système durant l'application de P. Pour un accroissement infinitésimal $d\delta$ du déplacement, l'énergie de déformation s'accroît d'une quantité représentée sur la figure par l'aire hachurée, et l'on obtient

$$dU = Pd\delta. \tag{a}$$

Puisque la relation est linéaire, le triangle infinitésimal ADC est identique au triangle OAB, donc

$$\frac{d\delta}{dP} = \frac{\delta}{P} \qquad \text{ou} \qquad d\delta = \frac{\delta dP}{P}. \tag{b}$$

Substituons ces expressions dans l'équation (a),

$$dU = P\frac{\delta dP}{P},$$

de laquelle nous déduisons l'expression du théorème de Castigliano :

$$\frac{dU}{dP} = \delta . \qquad (c)$$

La figure 307 représente un exemple auquel le théorème de Castigliano ne peut être appliqué. Deux barres horizontales égales, AC et BC, articulées en A, B et C, sont soumises à l'action d'une force verticale P en C. Soit C_1 la position de C après déformation et α l'angle d'inclinaison de chacune des barres dans l'état déformé. L'allongement unitaire des barres, d'après la figure 307*a*, est

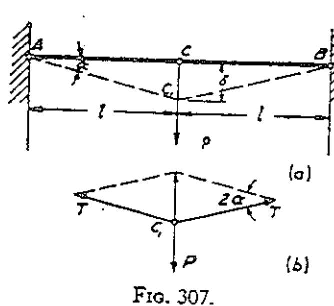


Fig. 307.

$$\varepsilon = \left(\frac{l}{\cos\alpha} - l\right) \div l . \qquad (d)$$

Si l'on ne tient compte que des faibles déplacements, alors α est petit et $1/\cos\alpha = 1+(\alpha^2/2)$ approximativement. Par suite, l'équation (d) donne

$$\varepsilon = \frac{\alpha^2}{2} .$$

Les forces correspondantes dans les barres sont

$$T = AE\varepsilon = \frac{AE\alpha^2}{2} . \qquad (e)$$

D'après la condition d'équilibre du point C_1 (fig. 307*b*),

$$P = 2\alpha T , \qquad (f)$$

et pour T, donné par l'équation (e),

$$P = AE\alpha^3 ,$$

d'où l'on tire

$$\alpha = \sqrt[3]{\frac{P}{AE}} \qquad (g)$$

et

$$\delta = l\alpha = l\sqrt[3]{\frac{P}{AE}} . \qquad (208)$$

Dans ce cas le déplacement n'est pas proportionnel à la charge P, quoique le matériau constituant les barres obéisse à la loi de Hooke. La relation entre δ et P est représentée sur la figure 306*b* par la courbe OA. L'aire hachurée OAB de cette figure représente l'énergie de déformation accumulée dans le système. La quantité d'énergie de déformation est

$$U = \int_0^\delta P d\delta : \qquad (h)$$

Substituant, d'après l'équation (208),

$$P = AE\frac{\delta^3}{l^3} , \qquad (i)$$

nous obtenons

$$U = \frac{AE}{l^3}\int_0^\delta \delta^3 d\delta = \frac{AE\delta^4}{4\,l^3} = \frac{P\delta}{4} = \frac{Pl}{4}\sqrt[3]{\frac{P}{AE}} . \qquad (j)$$

Ceci prouve que l'énergie de déformation n'est plus une fonction du second degré de la force P. Elle n'est pas non plus égale à la moitié mais au quart du produit $P\delta$ (voir § 71). Le théorème de Castigliano ne s'applique évidemment pas ici :

$$\frac{dU}{dP} = \frac{d}{dP}\left(\frac{Pl}{4}\sqrt[3]{\frac{P}{AE}}\right) = \frac{1}{3}\,l\sqrt[3]{\frac{P}{AE}} = \frac{1}{3}\,\delta .$$

On obtient des résultats analogues dans tous les cas où les déplacements ne sont pas proportionnels aux charges [35].

[35] Ces problèmes sont étudiés par F. Engesser, *Z. Architekt u. Ing.-Ver.*, vol. 35, p. 733, 1889 ; voir aussi H. M. Westergaard, *Proc. Am. Soc. Civil Engrs.*, fév. 1941.

12

BARRES COURBES

77. Flexion pure des barres courbes

Dans l'étude suivante nous supposons que la droite des centres de gravité des sections de la barre, appelée *fibre moyenne*, est une courbe plane et que les sections ont un axe de symétrie dans ce plan [1]. La barre est soumise à l'action de forces s'exerçant dans le plan de symétrie de sorte que la flexion se produit dans ce plan.

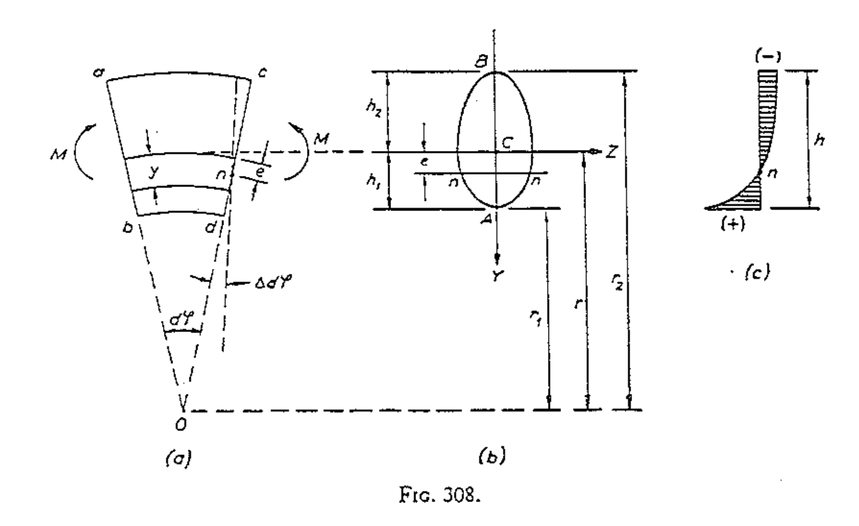


FIG. 308.

Considérons d'abord le cas d'une barre de section constante, soumise à la *flexion pure*, produite par les couples M que l'on applique aux extrémités (fig. 308). La répartition des contraintes s'obtient en faisant la même hypothèse que dans le cas des barres rectilignes, c'est-à-dire que les sections transversales initialement planes et normales à la fibre moyenne

(1) Le cas des sections non symétriques a été étudié par F. K. G. ODQVIST, *Publ. No. 107*, Inst. f. Festigkeitslehre Königl. Tech. Hochschule, Stockholm, 1953.

restent ainsi après la flexion [2]. Soit ab et cd deux sections très voisines de la barre (fig. 308*a*) et soit $d\varphi$ le petit angle que font entre elles ces deux sections avant la flexion. En raison de la flexion la section cd tourne par rapport à ab, autour de l'axe neutre nn, d'un petit angle $\Delta d\varphi$. Cet angle et le moment correspondant M sont positifs si la courbure initiale de la barre diminue au cours de la flexion. Du fait de cette rotation, les fibres longitudinales de la face convexe sont tendues. Soit y les distances des fibres à l'axe central perpendiculaire au plan de flexion, on considère ces distances positives dans le sens du centre de courbure de la fibre moyenne de la barre, et soit e la distance de l'axe neutre nn au centre de gravité C, on constate que l'extension d'une fibre quelconque, pendant la flexion, est $(y-e)\Delta d\varphi$ et l'allongement unitaire correspondant de la fibre est

$$\varepsilon = \frac{(y-e)\,\Delta d\varphi}{(r-y)\,d\varphi}. \tag{a}$$

Dans cette expression r représente le rayon de courbure de la fibre moyenne de la barre (fig. 308*b*) et le dénominateur désigne la longueur initiale des fibres entre les sections très voisines ab et cd.

Supposons qu'il n'y ait pas de pression latérale entre les fibres longitudinales [3], la contrainte de flexion, à une distance y de l'axe central et normale à la section, est

$$\sigma = \frac{E(y-e)\,\Delta d\varphi}{(r-y)\,d\varphi}. \tag{b}$$

On constate que la répartition des contraintes n'est plus linéaire comme dans le cas de barres rectilignes, mais qu'elle obéit à une loi hyperbolique comme l'indique la figure 308*c*. Du fait que la somme des forces normales, réparties sur la section, est nulle dans le cas de flexion pure, on conclut que l'axe neutre se déplace du centre de gravité de la section vers le centre de courbure de la fibre moyenne de la barre. Dans le cas d'une

(2) Cette théorie approchée fut étudiée par E. WINKLER, voir *Civilingenieur*, vol. 4, p. 232, 1858 ; voir aussi son ouvrage, *Die Lehre von Elastizität und Festigkeit*, chap. 15, Prague, 1867. Une théorie identique fut aussi développée par H. RÉSAL, *Ann. mines*, p. 617, 1862. F. GRASHOF a approfondi cette théorie dans son ouvrage, *Elastizität und Festigkeit*, p. 251, 1878 ; ainsi que TODHUNTER et PEARSON, *History of the Theory of Elasticity*, vol. 2, p. 422, 1893. Pour les ouvrages traitant de la résolution exacte des problèmes de barres courbes voir « Théorie de l'élasticité » par l'auteur et J. N. GOODIER, p. 67, 1961.

(3) La théorie exacte montre qu'il existe une certaine pression radiale mais elle n'a pas d'effet pratique sur la contrainte de flexion normale σ.

section rectangulaire, l'aire hachurée (fig. 308*c*) en traction doit être égale à celle en compression et l'on remarque immédiatement que la plus grande contrainte s'exerce sur la face concave. Pour que les contraintes dans les fibres extrêmes, en traction et en compression soient égales en valeur absolue, il faut employer des formes de section dont le centre de gravité est proche de la face concave de la barre.

L'équation (*b*) contient deux inconnues : la distance e de l'axe neutre nn au centre de gravité C (fig. 308*b*) et l'angle de rotation $\Delta d\varphi$. Pour déterminer ces quantités, nous utilisons les deux équations de la statique qui établissent que la somme des forces normales réparties sur une section est nulle et que le moment de ces forces est égal au moment extérieur M. Ces équations sont :

$$\int_A \sigma dA = \frac{E\Delta d\varphi}{d\varphi}\int_A \frac{(y-e)\,dA}{r-y} = 0\,, \qquad (c)$$

$$\int_A \sigma y dA = \frac{E\Delta d\varphi}{d\varphi}\int_A \frac{(y-e)\,y dA}{r-y} = M\,. \qquad (d)$$

On déduit de la première de ces équations

$$\int_A \frac{y dA}{r-y} - e\int_A \frac{dA}{r-y} = 0\,. \qquad (e)$$

La première intégrale du premier membre a la dimension d'une aire et s'exprime par

$$\int_A \frac{y dA}{r-y} = mA\,, \qquad (f)$$

où m est un nombre pur qu'il faut déterminer dans chaque type de section particulière par intégration de (*f*). La quantité mA s'appelle *aire modifiée* de la section. La seconde intégrale se transforme comme suit :

$$\int_A \frac{dA}{r-y} = \int_A \frac{(y+r-y)\,dA}{r(r-y)} = \int_A \frac{y dA}{r(r-y)} + \int_A \frac{dA}{r} = (m+1)\frac{A}{r}\,,$$

et l'équation (*e*) devient

$$mA - (m+1)\frac{Ae}{r} = 0\,,$$

d'où l'on tire

$$e = r\frac{m}{m+1} \qquad \text{ou} \qquad m = \frac{e}{r-e}\,. \qquad (209)$$

Considérons (*d*) et opérons la transformation

$$\int_A \frac{y^2 dA}{r-y} = -\int_A \left(y - \frac{ry}{r-y}\right) dA = -\int_A y dA + r\int_A \frac{y dA}{r-y} = mrA\,, \qquad (g)$$

nous obtenons

$$\frac{E\Delta d\varphi}{d\varphi}(mrA - meA) = M$$

et

$$\frac{E\Delta d\varphi}{d\varphi} = \frac{M}{m(r-e)A} = \frac{M}{Ae}\,. \qquad (210)$$

Substituons dans l'expression (*b*), nous obtenons la formule des contraintes de flexion :

$$\sigma = \frac{M(y-e)}{m(r-e)A(r-y)} = \frac{M(y-e)}{Ae(r-y)}\,. \qquad (211)$$

Pour obtenir les contraintes dans les fibres extrêmes on substitue aux points A et B (fig. 308*b*) les valeurs $y = h_1$ et $y = -h_2$, ce qui donne :

$$\sigma_A = \frac{M(h_1-e)}{Aer_1}\,, \qquad \sigma_B = \frac{-M(h_2+e)}{Aer_2}\,, \qquad (212)$$

où r_1 et r_2 désignent les rayons intérieur et extérieur de la barre courbe. En déterminant par les équations (*f*) et (209) les grandeurs m et e pour un type de section quelconque, on calcule aisément les contraintes de flexion à l'aide de (211).

La variation $\Delta d\varphi$ de l'angle $d\varphi$, entre les deux sections consécutives, s'obtient par l'équation (210) qui donne

$$\Delta d\varphi = \frac{M d\varphi}{eAE} = \frac{M ds}{erAE}\,,$$

et la variation correspondante de la courbure de la fibre moyenne de la barre est

$$\frac{\Delta d\varphi}{ds} = \frac{M}{erAE} = \frac{M(m+1)}{mr^2AE}\,. \qquad (213)$$

Si la dimension radiale h de la barre courbe est faible en comparaison du rayon de courbure r de la fibre moyenne, on peut négliger y par rapport à r dans les équations (*f*) et (*g*), et l'on conclut que lorsque le rayon de courbure croît, le nombre m tend vers zéro et la quantité mr^2A tend vers

la valeur du moment d'inertie central I_z de la section. L'expression (213) de la variation de courbure tend alors vers la valeur

$$\frac{\Delta d\varphi}{ds} = \frac{M}{EI_z}, \tag{214}$$

qui est la même que celle obtenue précédemment pour la courbure des barres initialement rectilignes (voir p. 133).

78. Flexion des barres courbes due à des efforts s'exerçant dans le plan de symétrie

Considérons alors un cas plus général de flexion d'une barre courbe (fig. 309*a*). On suppose que les forces P_1, ..., P_4 représentent un système de forces en équilibre et s'exerçant dans le plan de la fibre moyenne qui est le plan de symétrie de la barre. La flèche de la barre se produit évidemment dans le même plan. Pour déterminer les contraintes en une section *mn* de la barre (fig. 309), on suppose que la partie de la barre, située à droite de *mn*, est supprimée, son action sur la partie gauche est remplacée par une force appliquée au centre de gravité C de la section

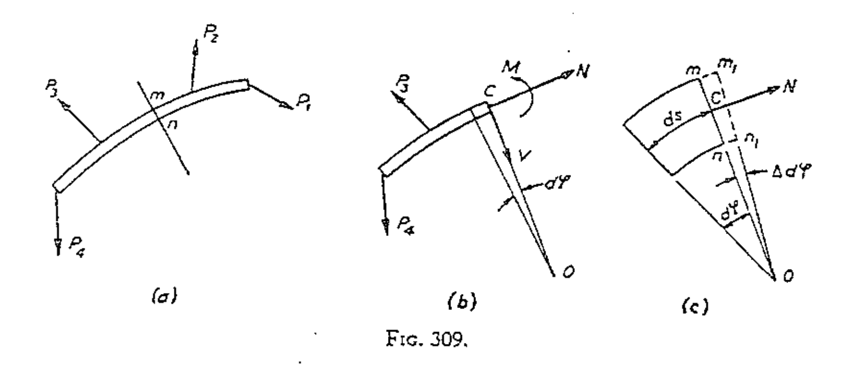


FIG. 309.

et par un couple M. Décomposons la force suivant deux composantes, N et V, l'une normale à la section et l'autre directement radiale, nous obtenons finalement le *moment fléchissant* M, la *force longitudinale* N et l'*effort tranchant* V. Les directions positives de ces forces sont indiquées sur la figure 309*b*.

Les contraintes et déformations produites par un couple ont été étudiées au paragraphe précédent, en analysant la flexion pure d'une barre courbe. Les contraintes correspondant à la force longitudinale sont uniformément réparties sur la section et leur valeur est N/A. Ces contraintes produisent des allongements unitaires uniformément répartis des fibres, mais les allongements totaux, proportionnels à la longueur initiale des fibres entre deux sections très voisines, sont proportionnels à la distance du centre de courbure O à la fibre moyenne (fig. 309*c*). Donc, du fait de l'action de la force longitudinale, l'angle initial $d\varphi$ augmente de

$$\Delta d\varphi = \frac{Nds}{AEr}. \tag{215}$$

En même temps la longueur initiale ds de l'élément de la fibre moyenne s'accroît de

$$\Delta ds = \frac{Nds}{AE}. \tag{216}$$

L'effort tranchant V produit des contraintes de cisaillement et un certain gauchissement de la section. On suppose généralement que la distribution des contraintes de cisaillement sur la section est la même que pour une barre rectiligne (4). Dans ce cas, le déplacement radial relatif de deux sections adjacentes est le même que pour des barres rectilignes, et il est égal à (voir p. 165)

$$\frac{\alpha V}{AG} ds. \tag{217}$$

Combinons les contraintes de flexion produites par le couple M avec celles produites par la force N, nous obtenons

$$\sigma = \frac{M(y-e)}{Ae(r-y)} + \frac{N}{A}. \tag{218}$$

On trouve, pour la variation $\Delta d\varphi$ de l'angle entre les deux sections consécutives,

$$\Delta d\varphi = \frac{Mds}{erAE} - \frac{Nds}{AEr}. \tag{219}$$

A l'aide des formules (215) à (219), on calcule les contraintes et les flèches d'une barre courbe, pour tout cas de charge située dans le plan de courbure de sa fibre moyenne.

(4) Cette hypothèse concorde suffisamment avec la solution exacte pour une section rectangulaire étroite ; voir la « Théorie de l'élasticité » de l'auteur, p. 82, 1961.

79. Cas particuliers de barres courbes

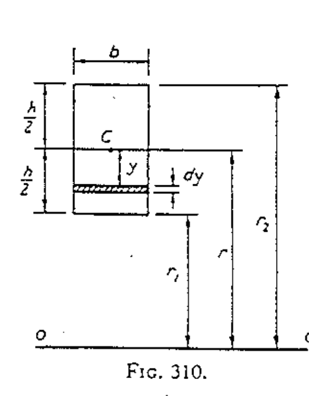


FIG. 310.

Dans ce paragraphe nous développons, dans plusieurs cas particuliers, le calcul du nombre m, défini par (f) du paragraphe 77, et de la distance e de l'axe neutre au centre de gravité de la section. Connaissant ces quantités les contraintes dans les barres courbes se calculent à l'aide des formules des deux paragraphes précédents.

Section rectangulaire. Dans ce cas la largeur b de la section (fig. 310) est constante et l'on obtient

$$mA = \int_A \frac{y\,dA}{r-y} = b\int_{-\frac{1}{2}h}^{+\frac{1}{2}h} \frac{(y-r+r)\,dy}{r-y} = br\int_{-\frac{1}{2}h}^{+\frac{1}{2}h} \frac{dy}{r-y} - bh = br\ln\frac{r_2}{r_1} - bh,$$

si bien que

$$m = \frac{r}{h}\ln\frac{r_2}{r_1} - 1 \qquad (a)$$

et

$$e = \frac{mr}{m+1} = \frac{r\{(r/h)\ln(r_2/r_1) - 1\}}{(r/h)\ln(r_2/r_1)} = r - \frac{h}{\ln(r_2/r_1)}. \qquad (b)$$

Pour de faibles valeurs de h/r, la distance e est petite par rapport à h et pour calculer sa valeur par l'équation (b), avec une exactitude satisfaisante, il faut prendre $\ln(r_2/r_1)$ avec un haut degré de précision. On élimine cet inconvénient en utilisant la série connue :

$$\ln(r_2/r_1) = \ln\frac{r+\frac{1}{2}h}{r-\frac{1}{2}h} = \frac{h}{r}\left[1 + \frac{1}{3}\left(\frac{h}{2r}\right)^2 + \frac{1}{5}\left(\frac{h}{2r}\right)^4 + \dots\right].$$

Et, d'après (a),

$$m = \frac{1}{3}\left(\frac{h}{2r}\right)^2 + \frac{1}{5}\left(\frac{h}{2r}\right)^4 + \dots \qquad (c)$$

Nous obtenons donc une série rapidement convergente, d'où l'on tire



aisément m et e avec la précision désirée. Si l'on ne prend que le premier terme de la série, nous obtenons

$$m \approx h^2/12\,r^2 \qquad \text{et} \qquad e \approx h^2/12\,r.$$

Avec deux termes de la série nous trouvons

$$m \approx \frac{h^2}{12\,r^2}\left(1 + \frac{3}{5}\,\frac{h^2}{4\,r^2}\right) \qquad \text{et} \qquad e \approx \frac{h^2}{12\,r}\left(1 + \frac{4}{15}\,\frac{h^2}{4\,r^2}\right).$$

On constate que pour de faibles valeurs de h/r la distance e est très petite. On peut donc supposer avec suffisamment d'exactitude que la distribution des contraintes est linéaire plutôt qu'hyperbolique. Afin de comparer les résultats obtenus pour ces deux types de répartion des contraintes, nous avons établi le tableau 8 dans le cas d'une section rectangulaire. Dans ce tableau les rapports

$$\alpha = \frac{\sigma_{max}}{M/Ar} \qquad \text{et} \qquad \beta = \frac{\sigma_{min}}{M/Ar}$$

sont calculés pour différentes valeurs de r/h. On remarque que pour $r/h > 10$ on peut supposer que la répartition des contraintes est linéaire et l'on utilise, avec suffisamment d'exactitude, la *formule des barres rectilignes* pour des contraintes maximums.

TABLEAU 8. — COMPARAISON DES RÉPARTITIONS LINÉAIRES ET HYPERBOLIQUES DES CONTRAINTES

r/h	Répartition hyperbolique		Répartition linéaire		Erreur sur σ_{max} %
	α	β	α	β	
1	9,2	−4,4	6	−6	35,0
2	14,4	−10,3	12	−12	17,0
3	20,2	−16,1	18	−18	10,9
4	26,2	−22,2	24	−24	9,2
10	62,0	−58	60	−60	3,2

Section trapézoïdale. — Utilisons encore l'équation

$$mA = \int_A \frac{y\,dA}{r-y} \qquad (d)$$

et introduisons la notation

$$v = r - y, \qquad (e)$$

où v désigne la distance de l'élément hachuré (fig. 311) à l'axe $O-O$ par rapport au centre de courbure de la fibre moyenne de la barre. nous obtenons

$$mA = \int_{r_1}^{r_2} \frac{(r-v)\,dA}{v} = r\int_{r_1}^{r_2} \frac{dA}{v} - A. \qquad (f)$$

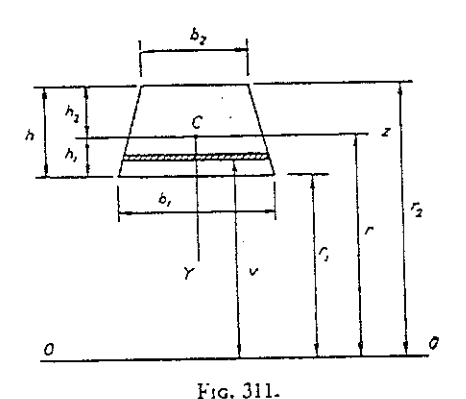


Fig. 311.

La largeur variable de la section (fig. 311) est

$$b = b_2 + (b_1 - b_2)\,(r_2 - v)/h$$

et

$$dA = dv\,[b_2 + (b_1 - b_2)\,(r_2 - v)/h]\,.$$

Substituons cette expression dans (*f*), nous obtenons

$$m = \frac{r}{A}\int_{r_1}^{r_2} [b_2 + (b_1 - b_2)\,(r_2 - v)/h]\,\frac{dv}{v} - 1$$

$$= \frac{r}{A}\left\{[b_2 + r_2\,(b_1 - b_2)/h]\ln\frac{r_2}{r_1} - (b_1 - b_2)\right\} - 1. \qquad (g)$$

Lorsque $b_1 = b_2 = b$, cette formule est identique à (*a*), obtenue pour une section rectangulaire. Si l'on fait $b_2 = 0$, nous déterminons, par (*g*), la valeur de m pour une *section triangulaire*.

Section ⊥. — Procédons comme dans le cas précédent, nous obtenons pour la section de la figure 312,

$$m = \frac{r}{A}\left(b_1 \ln\frac{r_3}{r_1} + b_2 \ln\frac{r_2}{r_3}\right) - 1. \qquad (h)$$

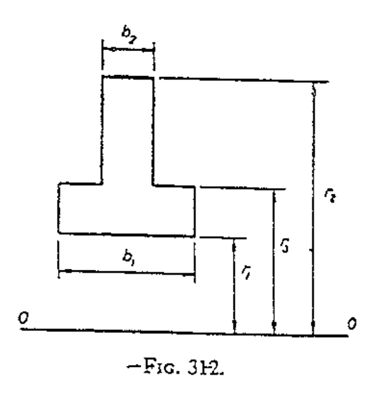


Fig. 312.

Section I. — La même méthode que celle employée plus haut donne (fig. 313) :

$$m = \frac{r}{A}\left(b_1 \ln\frac{r_3}{r_1} + b_2 \ln\frac{r_4}{r_3} + b_3 \ln\frac{r_2}{r_4}\right) - 1. \qquad (i)$$

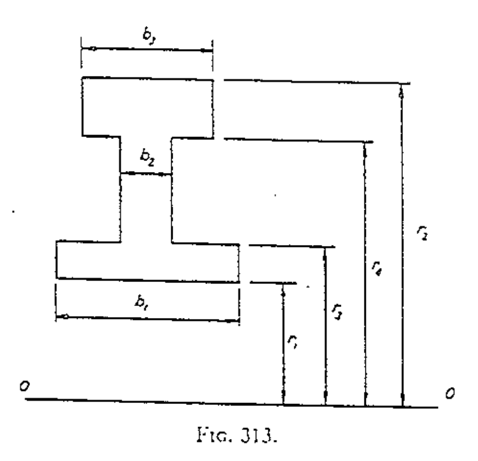


Fig. 313.

Section circulaire. — Remarquons que dans ce cas (fig. 314) la largeur de la section, à une distance y du centre de gravité, est $2\sqrt{h^2/4 - y^2}$, l'équation de m devient :

$$mA = \int_A \frac{y\,dA}{r-y} = r\int_A \frac{dA}{r-y} - A = 2r\int_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h} \frac{\sqrt{\frac{1}{4}h^2 - y^2}}{r-y}\,dy - A$$

$$= 2\pi r\,(r - \sqrt{r^2 - \tfrac{1}{4}h^2}) - A. \qquad (j)$$

Utilisons la série

$$\sqrt{1-h^2/4r^2} = 1 - \frac{1}{2}\,\frac{h^2}{4r^2} - \frac{1}{8}\left(\frac{h^2}{4r^2}\right)^2 - \frac{1}{16}\left(\frac{h^2}{4r^2}\right)^3 - \frac{5}{128}\left(\frac{h^2}{4r^2}\right)^4 - \dots$$

nous obtenons alors

$$m = \frac{1}{4}\left(\frac{h}{2r}\right)^2 + \frac{1}{8}\left(\frac{h}{2r}\right)^4 + \frac{5}{64}\left(\frac{h}{2r}\right)^6 + \dots \tag{220}$$

C'est une série rapidement convergente à partir de laquelle on calcule, avec la précision désirée, la valeur de m.

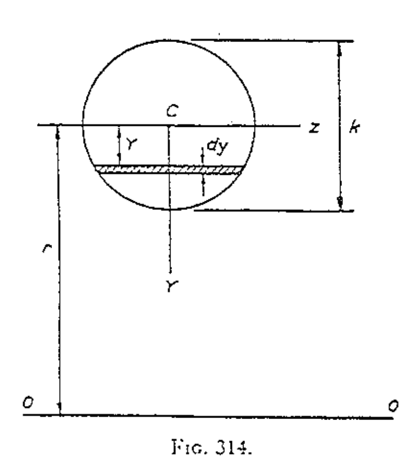


Fig. 314.

On peut constater que le calcul de m par (d) ne change pas sa valeur si tous les éléments dA sont multipliés par une certaine constante, car dans ce cas l'intégrale de l'équation (d) et l'aire A de la même équation augmentent dans le même rapport. Il s'ensuit que la valeur de m, obtenue pour une section circulaire par l'équation (j), est aussi valable pour une ellipse d'axes h et h_1 ; en effet, dans ce cas, l'aire élémentaire obtenue pour un cercle doit être multipliée par le rapport constant h_1/h.

On peut simplifier parfois le calcul de l'intégrale de (d) en divisant la section en petits éléments, en intégrant pour chacun de ceux-ci et en additionnant les résultats de ces intégrations. Prenons, par exemple, une section annulaire de diamètres extérieur h et intérieur h_1, utilisons l'équation (j) pour les cercles extérieur et intérieur, nous trouvons

$$m = \frac{1}{h^2-h_1^2}\left\{h^2\left[\frac{1}{4}\left(\frac{h}{2r}\right)^2 + \frac{1}{8}\left(\frac{h}{2r}\right)^4 + \dots\right] - h_1^2\left[\frac{1}{4}\left(\frac{h_1}{2r}\right)^2 + \frac{1}{8}\left(\frac{h_1}{2r}\right)^4 + \dots\right]\right\}. \tag{k}$$

Nous développons de la même manière les formules des sections des figures 312 et 313. Lorsque m est déterminé, on calcule e par l'équation (209) et la contrainte maximum par l'équation (212).

L'équation (d) sert de base à une détermination graphique de m dans les cas où la forme de la section ne peut s'exprimer analytiquement. On constate qu'en déterminant l'aire modifiée par l'équation (d), chaque aire élémentaire doit être diminuée dans le rapport $y/(r-y)$. Cette soustraction

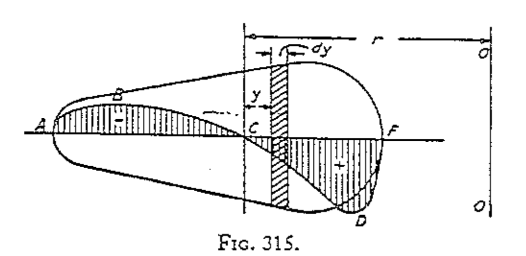


Fig. 315.

s'effectue en conservant la largeur initiale des bandes élémentaires mais en réduisant leurs longueurs du rapport ci-dessus (fig. 315). De cette manière on obtient l'aire hachurée de la figure. La différence entre les aires CDF et ABC représente l'aire modifiée mA. Connaissant cette aire, on détermine sans peine les quantités m et e.

Puisque mA est obtenue par différence de deux aires l'exactitude du résultat est inférieure et cette méthode ne donne qu'une approximation grossière. On obtient une meilleure approximation en divisant la section en bandes d'égale largeur et en utilisant la règle de Simpson pour calculer l'intégrale de l'équation (d) [5].

La théorie des barres courbes développée plus haut s'applique au calcul des *crochets de levage* [6]. La figure 316 représente la partie en

Fig. 316.

[5] Les exemples de ces calculs sont donnés dans une étude de A. M. Wahl, *J. Appl. Mech.*, vol. 13, p. 239, 1946.

[6] Une étude théorique et expérimentale des crochets de levage a été réalisée par le National Physical Laboratory de Grande-Bretagne ; voir l'étude de H. J. Gough, H. L. Cox et D. G. Sopwith. *Proc. Inst. Mech. Engrs. (London)*, déc. 1934. Pour une comparaison des contraintes théoriques avec les résultats expérimentaux dans les crochets à section rectangulaire, voir K. Böttcher, *Forschungsarb., No. 377*, 1931.

contrainte d'un crochet à section circulaire constante. On suppose que la force verticale P passe par le centre de courbure O de l'axe du crochet. La contrainte de flexion maximum se produit dans la section perpendiculaire à la charge P. Par suite, en opérant comme au paragraphe 78, nous trouvons que l'effort de traction P, appliqué au centre C de la section et le moment fléchissant $M = Pr$ s'exercent sur la section horizontale du crochet. Combinons les contraintes directes et de flexion, et utilisons l'équation (218), nous obtenons

$$\sigma = \frac{M(y-e)}{Ae(r-y)} + \frac{P}{A} = \frac{Py}{Am(r-y)}.$$

Appliquons cette formule aux points extrêmes, pour lesquels $y = \pm h/2$, nous trouvons que

$$\sigma_{max} = \frac{P}{A}\frac{h}{2mr_1}, \qquad \sigma_{min} = -\frac{P}{A}\frac{h}{2mr_2}. \tag{221}$$

On remarque que la contrainte la plus grande en valeur absolue est la contrainte de traction sur la face intérieure, obtenue en multipliant la contrainte P/A par un *coefficient de contrainte* :

$$k = \frac{h}{2mr_1}, \tag{222}$$

dont la valeur dépend du rapport $h/2r$. Utilisons l'expression (220) de m, on trouve que k varie de 13,5 à 15,4 lorsque le rapport $h/2r$ varie de 0,6 à 0,4 [7]. Le calcul des contraintes dans les crochets de levage de section irrégulière s'opère par la règle de Simpson qui détermine m [8].

Problèmes

1. Déterminer le rapport des valeurs absolues de σ_{max} et σ_{min} pour une barre courbe de section rectangulaire en flexion pure. On pose $r = 12{,}5$ cm et $h = 10$ cm.

Réponse. $\left|\frac{\sigma_{max}}{\sigma_{min}}\right| = 1{,}75$.

2. Résoudre le problème précédent en supposant que la section est circulaire.

Réponse. $e = 5{,}2$ mm ; $\left|\frac{\sigma_{max}}{\sigma_{min}}\right| = 1{,}89$.

(7) Pour $h/2r = 0{,}6$ le coefficient k atteint sa valeur minimum.
(8) Cette méthode est décrite par A. M. WAHL, *loc. cit.*, p. 374.

3. Déterminer les dimensions b_1 et b_3 d'une section I (fig. 313) de manière que dans le cas de la flexion pure σ_{max} et σ_{min} soient égaux en valeur absolue. Les dimensions sont $r_1 = 3$ cm, $r_3 = 4$ cm, $r_4 = 6$ cm, $r_2 = 7$ cm, $b_2 = 1$ cm, $b_1 + b_3 = 5$ cm.

Solution. D'après les équations (212),

$$\frac{h_1 - e}{r_1} = \frac{h_2 + e}{r_2} \qquad \text{ou} \qquad \frac{r - r_1 - e}{r_1} = \frac{r_2 - r + e}{r_2},$$

d'où l'on tire

$$r - e = \frac{r}{m+1} = \frac{2r_1r_2}{r_1 + r_2} = 4{,}20 \text{ cm}.$$

Remplaçons m par sa valeur tirée de (i) et remarquons que $A = 7$ cm², nous avons

$$4{,}20 = \frac{7}{b_1 \ln\frac{4}{3} + 1 \cdot \ln\frac{6}{4} + (5 - b_1)\ln\frac{7}{6}},$$

d'où

$$b_1 \ln\frac{4}{3} + (5 - b_1)\ln\frac{7}{6} = \frac{7}{4{,}20} - 1 \cdot \ln\frac{6}{4},$$

$$0{,}288\, b_1 + 0{,}154\,(5 - b_1) = 1{,}667 - 0{,}406 = 1{,}261 \text{ cm},$$

$$b_1 = 3{,}67 \text{ cm}, \quad b_2 = 5 - 3{,}67 = 1{,}33 \text{ cm}.$$

4. Déterminer les dimensions b_1 d'une section ⊥ (fig. 312) de manière que dans le cas de la flexion pure σ_{max} et σ_{min} soient égaux en valeur absolue. Les dimensions sont : $r_1 = 3$ cm, $r_2 = 7$ cm, $r_3 = 4$ cm, $b_2 = 1$ cm.

Réponse. $b_1 = 3{,}09$ cm.

5. Déterminer σ_{max} et σ_{min} pour la section trapézoïdale mn du crochet de la figure 317. On pose $P = 4\,500$ N, $b_1 = 1\frac{5}{8}$ cm, $b_2 = \frac{3}{8}$ cm, $r_1 = 1\frac{1}{4}$ cm et $r_2 = 5$ cm.

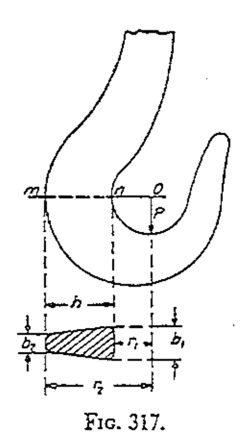


FIG. 317.

Solution. D'après l'équation (*g*),

$$r-e=\frac{r}{m+1}=\frac{3{,}750}{\dfrac{1\frac{5}{8}\times 5-\frac{3}{8}\times 1\frac{1}{4}}{3\frac{3}{4}}\ln 5/1\tfrac{1}{4}-(1\tfrac{5}{8}-\tfrac{3}{8})}$$

$$=\frac{3{,}750}{1{,}580}=2{,}373\ \text{cm}.$$

Le rayon de la fibre moyenne

$$r=r_1+\frac{b_1+2\,b_2}{b_1+b_2}\cdot\frac{h}{3}=2{,}734\ \text{cm}.$$

Donc, $e=0{,}361$ cm, $h_1-e=r-e-r_1=2{,}373-1{,}250=1{,}123$ cm, $h_2+e=r_2-r+e=5-2{,}373=2{,}627$ cm, $Ae=3{,}75\times 0{,}361=1{,}35$, $M=Pr=12\,300$ cm · N. Les contraintes de flexion sont, d'après les équations (212),

$$\sigma_{max}=\frac{12\,300\times 1{,}123}{1{,}35\times 1{,}25}=8\,200\ \text{N/cm}^2\ \text{ou}\ 820\ \text{bars},$$

$$\sigma_{min}=-\frac{12\,300+2{,}627}{1{,}35\times 5}=-4\,800\ \text{N/cm}^2\ \text{ou}\ -480\ \text{bars}.$$

On superposera, à ces contraintes de flexion, une contrainte de traction uniformément répartie $P/A=4\,500/3{,}75=1\,200$ N/cm² ou 120 bars. Les contraintes totales sont :

$$\sigma_{max}=8\,200+1\,200=9\,400\ \text{N/cm}^2,$$

$$\sigma_{min}=-4\,800+1\,200=-3\,600\ \text{N/cm}^2.$$

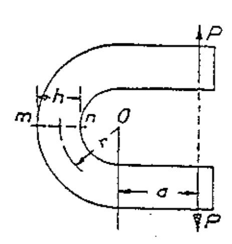


FIG. 318.

6. Trouver la contrainte maximum dans un crochet de section circulaire, sachant que le diamètre de sa section est $h=2{,}5$ cm, le rayon de l'axe central $r=2{,}5$ cm et $P=4\,500$ N.

Réponse. $\sigma_{max}=1\,239$ bars.

7. Déterminer σ_{max} et σ_{min} pour une barre courbe de section circulaire, subissant le cas de charge de la figure 318. On suppose que $h=10$ cm, $r=10$ cm, $a=10$ cm et $P=25$ kN.

Réponse. $\sigma_{max}=746$ bars, $\sigma_{min}=-286$ bars.

8. Résoudre le problème 7 en supposant que la section *mn* a la forme indiquée sur la figure 312 avec les dimensions suivantes : $r_1=5$ cm, $r_3=7{,}5$ cm, $r_2=22{,}5$ cm, $b_1=2{,}5$ cm, $b_2=10$ cm, $a=10$ cm et $P=18\,160$ N.

Réponse. $\sigma_{max}=346$ bars, $\sigma_{min}=-126$ bars.

9. Résoudre le problème 7 en supposant que la section *mn* est trapézoïdale, comme sur la figure 311. Les dimensions sont : $r_1=5$ cm, $r_2=10{,}62$ cm, $b_1=5$ cm, $b_2=2{,}5$ cm, $a=0$ et $P=12{,}5$ kN.

Réponse. $\sigma_{max}=6\,352$ bars, $\sigma_{min}=-373$ bars.

80. Flèche des barres courbes

On calcule les flèches des barres courbes à l'aide du théorème de Castigliano [9]. Commençons par le cas le plus simple où les dimensions de la section de la barre sont faibles en comparaison du rayon de courbure de sa fibre moyenne [10]. Par suite, la variation de l'angle entre deux sections très voisines est déterminée par l'équation (214), analogue à l'équation (*a*), page 133, des barres rectilignes, et l'énergie de déformation de la flèche s'exprime par l'équation

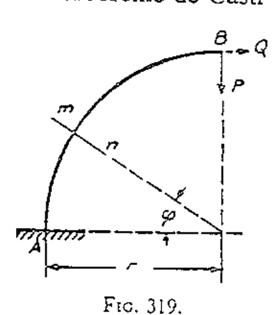


FIG. 319.

$$U=\int_0^s\frac{M^2\,ds}{2\,EI_z},\tag{223}$$

où l'intégration est étendue à la longueur totale *s* de la barre. L'équation (223) est analogue à l'équation (190) des poutres droites [11], et la flèche du point d'application d'une charge *P* quelconque, dans la direction de cette charge, est

$$\delta=\frac{\partial U}{\partial P}.$$

Prenons, par exemple, une barre courbe de section uniforme dont la fibre moyenne est un quart de cercle (fig. 319), encastrée à son extrémité inférieure *A* laquelle possède une tangente verticale, et sollicitée à son autre extrémité par une charge verticale *P*. Le moment fléchissant, dans

(9) Voir p. 314.

(10) Le cas où les dimensions de la section ne sont plus négligeables est étudié au problème 6, page 370.

(11) L'énergie de déformation due aux efforts longitudinaux et tranchants est négligeable dans le cas des barres courbes minces. Voir page 366.

une section quelconque mn, est $M = -Pr\cos\varphi$. Substituons cette valeur dans l'équation (223), la flèche verticale de l'extrémité B est

$$\delta = \frac{d}{dP}\int_0^{\pi/2}\frac{M^2 r d\varphi}{2EI_z} = \frac{1}{EI_z}\int_0^{\pi/2} M\frac{dM}{dP} r d\varphi$$
$$= \frac{1}{EI_z}\int_0^{\pi/2} Pr^3\cos^2\varphi d\varphi = \frac{\pi}{4}\frac{Pr^3}{EI_z}.$$

Si l'on recherche le déplacement horizontal de B on ajoutera une charge fictive horizontale Q, comme indiqué sur la figure par la ligne en tirets. Par suite,

$$M = -[Pr\cos\varphi + Qr(1-\sin\varphi)]$$

et

$$\frac{\partial M}{\partial Q} = -r(1-\sin\varphi).$$

La flèche horizontale s'exprime par

$$\delta_1 = \left(\frac{\partial U}{\partial Q}\right)_{Q=0} = \frac{\partial}{\partial Q}\int_0^{\pi/2}\frac{M^2 r d\varphi}{2EI_z} = \frac{1}{EI_z}\int_0^{\pi/2} M\frac{\partial M}{\partial Q} r d\varphi.$$

On remplace Q par 0 dans l'expression de M, d'où

$$\delta_1 = \frac{1}{EI_z}\int_0^{\pi/2} Pr^3\cos\varphi(1-\sin\varphi)\,d\varphi = \frac{Pr^3}{2EI_z}.$$

Anneau mince. — Considérons, comme second exemple, le cas d'un anneau circulaire mince soumis à l'action de deux forces égales et opposées P s'exerçant sur le diamètre vertical (fig. 320). En raison de la symétrie on ne considérera que le quart de l'anneau (fig. 320b) ; l'on peut conclure aussi qu'il n'existe pas de contraintes de cisaillement sur la section mn et que l'effort de traction sur cette section est égal à $P/2$. La valeur du moment fléchissant M_0 s'exerçant sur cette section est statiquement indéterminée et se détermine par le théorème de Castigliano. On constate, du

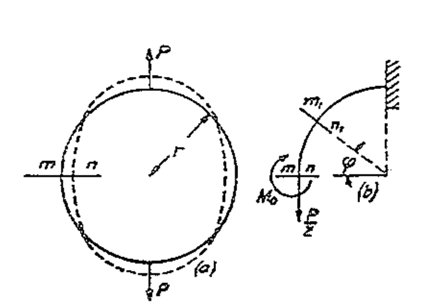


Fig. 320.

fait de la symétrie, que la section mn ne subit pas de rotation pendant la flexion de l'anneau. Par suite, le déplacement correspondant à M_0 sur la figure 320b est nul et

$$\frac{dU}{dM_0} = 0, \qquad (a)$$

où U désigne l'énergie de déformation du quart de l'anneau considéré. Pour une section m_1n_1 faisant un angle φ avec l'horizontale, le moment fléchissant est ([12])

$$M = M_0 - \frac{P}{2}r(1-\cos\varphi) \qquad (b)$$

et

$$\frac{dM}{dM_0} = 1.$$

Substituons ceci dans l'expression (223) de l'énergie potentielle et utilisons l'équation (a), nous trouvons

$$0 = \frac{d}{dM_0}\int_0^{\pi/2}\frac{M^2 r d\varphi}{2EI_z} = \frac{1}{EI_z}\int_0^{\pi/2} M\frac{dM}{dM_0} r d\varphi$$
$$= \frac{1}{EI_z}\int_0^{\pi/2}\left[M_0 - \frac{P}{2}r(1-\cos\varphi)\right] r d\varphi,$$

d'où l'on tire,

$$M_0 = \frac{Pr}{2}\left(1-\frac{2}{\pi}\right) = 0{,}182\,Pr. \qquad (224)$$

Substituons dans (b), il vient

$$M = \frac{Pr}{2}\left(\cos\varphi - \frac{2}{\pi}\right). \qquad (c)$$

Cette expression donne le moment fléchissant dans une section quelconque de l'anneau. Les moments fléchissants les plus importants se situent aux points d'application des forces P. Substituons $\varphi = \pi/2$ dans (c), nous trouvons

$$M = -\frac{Pr}{\pi} = -0{,}318\,Pr. \qquad (225)$$

Le signe moins indique que les moments fléchissants aux points d'application des forces P tendent à accroître la courbure, tandis que le mo-

([12]) Les moments qui tendent à réduire la courbure initiale de la barre sont précédés du signe plus.

ment M_0 dans la section mn tend à la réduire, et la forme de l'anneau, après flexion, est indiquée sur la figure par la ligne en tirets.

L'accroissement du diamètre vertical de l'anneau se calcule aussi par le théorème de Castigliano. L'énergie de déformation totale accumulée dans l'anneau est

$$U = 4\int_0^{\pi/2} \frac{M^2 r\mathrm{d}\varphi}{2\,EI_z},$$

où M se détermine par l'équation (c). L'accroissement du diamètre vertical est alors

$$\delta = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}P} = \frac{4}{EI_z}\int_0^{\pi/2} M\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}P}r\mathrm{d}\varphi = \frac{Pr^3}{EI_z}\int_0^{\pi/2}\left(\cos\varphi - \frac{2}{\pi}\right)^2\mathrm{d}\varphi$$

$$= \left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\right)\frac{Pr^3}{EI_z} = 0{,}149\,\frac{Pr^3}{EI_z}. \qquad (226)$$

Pour calculer le raccourcissement du diamètre horizontal de l'anneau (fig. 320), on applique deux forces Q, directement opposées, aux extrémités du diamètre horizontal. Ensuite, en calculant $(\partial U/\partial Q)_{Q=0}$, nous trouvons que le raccourcissement du diamètre horizontal est ([13])

$$\delta_1 = \left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2}\right)\frac{Pr^3}{EI_z} = 0{,}137\,\frac{Pr^3}{EI_z}. \qquad (227)$$

Anneau épais. — Lorsque les dimensions de la section d'une barre courbe ne sont plus petites en comparaison du rayon de la fibre moyenne, il faut tenir compte non seulement de l'énergie de déformation due au moment fléchissant mais aussi de celle due aux efforts longitudinaux et tranchants. La variation d'angle entre deux sections très voisines (fig. 321) est dans ce cas, d'après l'équation (213),

FIG. 321.

$$\Delta\mathrm{d}\varphi = \frac{M\mathrm{d}\varphi}{AEe} = \frac{M\mathrm{d}s}{AEer},$$

et l'énergie due à la flexion de l'élément compris entre deux sections très voisines est

$$\mathrm{d}U_1 = \frac{1}{2}M\Delta\mathrm{d}\varphi = \frac{M^2\mathrm{d}s}{2\,AEer}. \qquad (d)$$

([13]) Une étude très complète des anneaux circulaires soumis à différents cas de charges a été réalisée par C. B. BIEZENO et son collaborateur J. J. KOCH. Les principaux résultats de leurs publications sont présentés dans l'ouvrage de BIEZENO et R. GRAMMEL, « Technische Dynamik », 2ᵉ éd., vol. 1, pp. 362-395, 1953.

L'effort longitudinal N produit un allongement de l'élément compris entre les deux sections consécutives, dans la direction de la fibre moyenne de la barre, cet allongement est égal à $N\mathrm{d}s/AE$ et augmente l'angle $\mathrm{d}\varphi$ de la quantité $N\mathrm{d}s/AEr$ (éq. 219). Le travail effectué par les efforts N, durant leur application, est $N^2\mathrm{d}s/2AE$. Pendant l'application des efforts N, les couples M provoquent le travail négatif $-MN\mathrm{d}s/AEr$. Par suite, l'énergie totale accumulée dans un élément de la barre pendant l'application des efforts N est

$$\mathrm{d}U_2 = \frac{N^2\mathrm{d}s}{2\,AE} - \frac{MN\mathrm{d}s}{AEr}. \qquad (e)$$

L'effort tranchant V provoque le glissement, d'une section par rapport à l'autre, égal à $\alpha V\mathrm{d}s/AG$, où α est un facteur numérique dépendant de la forme de la section (voir éq. 217). La valeur correspondante de l'énergie de déformation est

$$\mathrm{d}U_3 = \frac{\alpha V^2\mathrm{d}s}{2\,AG}. \qquad (f)$$

Additionnons (d), (e) et (f) et intégrons sur la longueur de la barre, l'énergie de déformation totale d'une barre courbe devient

$$U = \int_0^s \left(\frac{M^2}{2\,AEer} + \frac{N^2}{2\,AE} - \frac{MN}{AEr} + \frac{\alpha V^2}{2\,AG}\right)\mathrm{d}s. \qquad (228)$$

Utilisons cette équation pour résoudre le problème de la figure 319. Considérons comme positives les directions de la figure 321, nous avons :

$$M = -Pr\cos\varphi, \qquad N = -P\cos\varphi, \qquad V = P\sin\varphi,$$

où r désigne le rayon de la fibre moyenne. Substituons dans l'équation (228) et utilisons le théorème de Castigliano, nous obtenons la flèche verticale du point B :

$$\delta = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}P} = \frac{Pr}{AE}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{r\cos^2\varphi}{e} - \cos^2\varphi + \frac{\alpha E}{G}\sin^2\varphi\right)\mathrm{d}\varphi$$

$$= \frac{\pi Pr}{4\,AE}\left(\frac{r}{e} + \frac{\alpha E}{G} - 1\right).$$

Si la section de la barre est un rectangle de largeur b et de hauteur h, nous trouvons, en utilisant pour e la valeur approchée $h/12r$ (voir p. 353) et en prenant $\alpha = 1{,}2$ et $E/G = 2.6$:

$$\delta = \frac{\pi Pr}{4\,AE}\left(\frac{12\,r^2}{h^2} + 2{,}12\right).$$

Lorsque h est faible par rapport à r, le second terme entre parenthèses, représentant l'influence de N et V sur la flèche, peut être négligé et l'on aboutit à l'équation déjà obtenue à la page 362.

La théorie ci-dessus des barres courbes épaisses s'applique souvent au calcul des contraintes dans des éléments de machine tels que les chaînons et les extrémités œillées des barres (fig. 322). Dans ces cas, une difficulté surgit quant à la détermination de la répartition des charges sur la surface de la barre courbe. Cette répartition dépend de la grandeur de l'intervalle entre le boulon et la barre courbe. On aboutira à une solution satisfaisante du problème en combinant les méthodes de recherches analytiques et expérimentales [14].

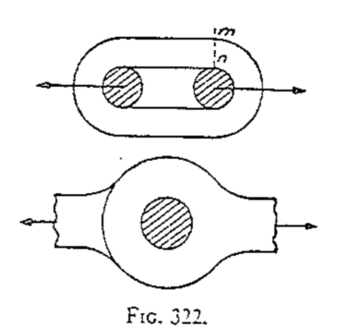


Fig. 322.

Le cas particulier de l'extrémité œillée d'une section rectangulaire (fig. 322*b*) a été étudiée rigoureusement [15]. Dans cette étude, on a supposé qu'il n'existait pas d'intervalles et que le boulon était absolument rigide. La contrainte de traction maximum se produit sur la face intérieure dans les sections perpendiculaires à l'axe de la barre, et sa valeur s'exprime par

$$\sigma_{max} = \alpha \frac{8P}{\pi^2 r_2 t}, \tag{g}$$

où P représente l'effort de traction total transmis par la barre, α désigne un facteur numérique dépendant du rapport r_2/r_1 entre les rayons extérieur et intérieur de l'œil et t l'épaisseur de l'œil mesurée perpendiculairement au plan de la figure. Pour r_2/r_1 égal à 2 et 4 les valeurs de α sont respectivement 4.30 et 4,39. Ces valeurs obtenues par la formule (g) concordent avec les résultats expérimentaux [16].

La théorie des anneaux minces a trouvé une application dans l'analyse

(14) Pour une étude théorique du problème, voir H. Reissner, *Jahrb. wiss. Ges. f. Luftfahrt.* 1928 ; voir aussi J. Beke, *Eisenbau*, p. 233, 1921 ; F. Bleich, *Theorie und Berechnung der eisern Brücken*, p. 256, 1924 ; Blumenfeld, *Z. Ver. deut. Ing.*, 1907 ; et Baumann, *ibid.*, p. 397, 1908. Des expériences ont été réalisées par le Dr. Mathar, *Forschungsarb.*, *No. 306*, 1928 ; voir aussi D. Rühl, dissertation, Dantzig, 1920 ; Preuss, *Z. Ver. deut. Ing.*, vol. 55, p. 2173, 1911 ; M. Voropaeff, *Bull. Polytech. Inst. (Kiev)*, 1910 ; E. G. Coker, « Photoelasticity », *J. Franklin Inst.*, 1925.

(15) H. Reissner et F. Strauch, *Ing. Arch.*, vol. 4, p. 481, 1933.

(16) Voir G. Bierett, *Mitt. deut. Materialprüfungsanstalt.*, *Spec. No. 15*, 1931. Une étude photoélastique de l'extrémité œillée a été réalisée par K. Takemura et Y. Hosokawa, *Rept. Aeronaut. Inst. (Tokyo)*, vol. 18, p. 128, 1926. Voir aussi M. M. Frocht et H. N. Hill, *J. Appl. Mech.*, vol. 7, p. 5, 1940. Dans cette dernière étude, il est tenu compte de l'intervalle entre le boulon et le trou.

des anneaux de fuselage [17] en aéronautique, et des anneaux de renforcement de sous-marins [18].

Nous avons utilisé jusqu'à présent, pour le calcul des flèches des barres courbes, le théorème de Castigliano, mais ce problème peut être résolu, comme dans le cas des barres rectilignes, en introduisant des charges fictives. Les calculs sont particulièrement simples dans le cas des barres minces

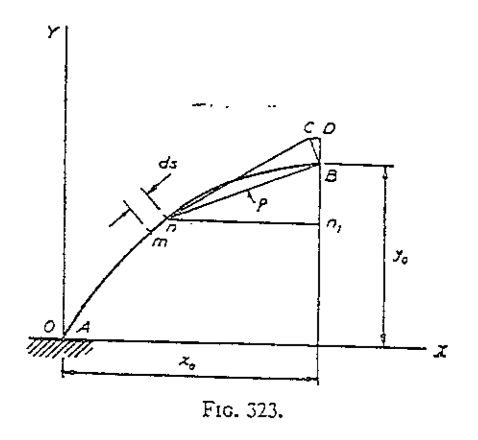


Fig. 323.

lorsque l'influence des efforts longitudinaux et tranchants sur les flèches est négligeable. Considérons une barre AB (fig. 323) encastrée en A et chargée suivant son plan de symétrie xy. Pour calculer la flèche à l'extrémité B, nous considérons le déplacement infinitésimal $\overline{BC}$ de cette extrémité, provoqué par la flexion d'un élément mn de la barre. Utilisons l'équation (214) pour la variation d'angle entre les deux sections voisines m et n, nous trouvons

$$\overline{BC} = \frac{M\,ds}{EI_z}\rho. \tag{h}$$

Remarquons que le triangle infinitésimal BCD est semblable au triangle nBn_1, nous trouvons les deux composantes de ce déplacement :

$$\overline{CD} = \frac{M\,ds}{EI_z}(y_0 - y), \qquad \overline{DB} = \frac{M\,ds}{EI_z}(x_0 - x). \tag{i}$$

(17) Voir W. Stieda, *Luftfahrt-Forsch.*, vol. 18, p. 214, 1941. Pour la traduction anglaise voir aussi *Nat. Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Mem. No. 1004*, 1942. Voir aussi D. A. Du Plantier, *J. Aeronaut. Sci.*, vol. 11, p. 136, 1944 ; R. Benjamin, *ibid.*, vol. 19, p. 585, 1922.

(18) Une étude complète de ces anneaux existe dans l'ouvrage de P. F. Papkovitch, *Structural Mechanics of Ships*, vol. 2, pp. 1-816, Moscou, 1947.

Pour obtenir les deux composantes de la flèche totale de l'extrémité B, il suffit de sommer les déplacements élémentaires (i) pour tous les éléments de la barre. Soit u et v ces composantes et considérons-les positives lorsqu'elles ont les directions positives des axes x et y, nous obtenons :

$$u = -\int_0^s \frac{M\,ds}{EI_z}(y_0-y), \qquad v = \int_0^s \frac{M\,ds}{EI_z}(x_0-x). \qquad (j)$$

Considérons par exemple la barre représentée sur la figure 319, nous avons

$$M = -Pr\cos\varphi, \qquad y_0-y = r(1-\sin\varphi), \qquad x_0-x = r\cos\varphi.$$

Substituons ces valeurs dans les équations (j) et intégrons, nous obtenons des résultats identiques à ceux obtenus à la page 362.

On constate par les équations (j) que si l'on applique à chaque élément de la barre une charge horizontale fictive de valeur $M\mathrm{d}s/EI_z$ le moment de cette distribution de charges par rapport à l'extrémité B donne la valeur de la flèche u. Si, au lieu de considérer les charges fictives horizontales on les prend verticales et de même intensité, le moment de ces charges donne la flèche v.

Problèmes

1. Déterminer la flèche verticale de l'extrémité B de la barre courbe mince de section uniforme et de fibre moyenne semicirculaire (fig. 324).

Solution. L'énergie de déformation de flexion est

$$U = \int_0^\pi \frac{M^2 r\,d\varphi}{2\,EI_z} = \int_0^\pi \frac{P^2r^2(1-\cos\varphi)^2\,r\,d\varphi}{2\,EI_z}.$$

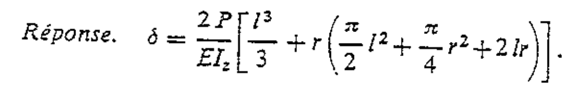
La flèche à l'extrémité s'exprime par

$$\delta = \frac{dU}{dP} = \frac{Pr^3}{EI_z}\int_0^\pi (1-\cos\varphi)^2\,d\varphi = \frac{3\pi}{2}\frac{Pr^3}{EI_z}.$$

2. Déterminer le déplacement horizontal de l'extrémité B du problème précédent.

Réponse. $\delta = \dfrac{2\,Pr^3}{EI_z}.$

3. Déterminer l'augmentation de la distance comprise entre les extrémités A et B de la barre mince de section uniforme par une portion semicirculaire CD et deux portions rectilignes AC et BD (fig. 325).


Réponse. $\delta = \dfrac{2P}{EI_z}\left[\dfrac{l^3}{3} + r\left(\dfrac{\pi}{2}l^2 + \dfrac{\pi}{4}r^2 + 2lr\right)\right].$

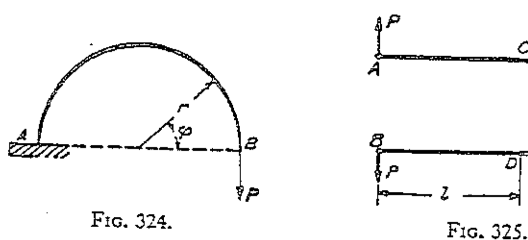


Fig. 324. Fig. 325.

4. Un chaînon se composant de deux demi-cercles et deux parties droites est soumis à l'action de deux forces égales et opposées s'exerçant sur l'axe de symétrie vertical (fig. 326). Déterminer le moment fléchissant maximum,

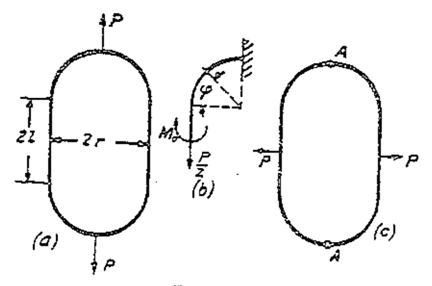


Fig. 326.

en supposant que les dimensions de la section du chaînon sont plus faibles par rapport à r.

Solution. Considérons uniquement le quart du chaînon (fig. 326b), on détermine le moment M_0 statiquement indéterminé par la condition suivant laquelle la section où s'exerce ce moment ne subit pas de rotation. Alors

$$\frac{dU}{dM_0} = 0.$$

Remarquons que pour la partie droite $M = M_0$ et que pour la partie courbe $M = M_0-(P/2)r(1-\cos\varphi)$, en tenant compte de l'énergie de déformation de flexion uniquement on trouve

$$\frac{dU}{dM_0} = \frac{d}{dM_0}\left\{\frac{1}{2\,EI_z}\int_0^l M_0^2\,dx + \frac{1}{2\,EI_z}\int_0^{\pi/2}\left[M_0 - \frac{Pr}{2}(1-\cos\varphi)\right]^2 r\,d\varphi\right\} = 0,$$

d'où l'on tire

$$M_0 = \frac{Pr^2}{2}\,\frac{\pi-2}{2\,l+\pi r}.$$

Pour $l=0$, cette expression est identique à (224), obtenue précédemment pour un anneau circulaire. Le moment est maximum aux points d'application des forces P et il est égal à

$$M_1 = M_0 - \frac{Pr}{2}.$$

5. Résoudre le problème précédent en supposant que les forces P sont appliquées comme le montre la figure 326*c*.

Réponse. Le moment fléchissant au point A s'exprime par

$$M_1 = \frac{P}{2}\frac{r^2(\pi-2)+2rl+l^2}{\pi r+2l}.$$

Pour $l=0$, l'équation est identique à celle d'un anneau circulaire. Pour $r=0$, $M_1 = Pl/4$ elle est identique à celle d'une barre à extrémités encastrées.

6. Déterminer le moment fléchissant M_0 et l'accroissement du diamètre vertical de l'anneau circulaire de la figure 320, en supposant que la section de l'anneau est un rectangle de largeur b et de hauteur h, dimensions qui ne sont pas négligeables devant le rayon r de la fibre moyenne.

Solution. Si l'on utilise l'équation (228) de l'énergie potentielle et l'équation (*b*) du moment fléchissant, l'expression déterminant M_0 s'écrit

$$\frac{dU}{dM_0} = \int_0^{\pi/2}\left(\frac{M}{AEe} - \frac{N}{AE}\right)d\varphi = 0,$$

d'où l'on tire

$$M_0 = \frac{Pr}{2}\left(1 - \frac{2}{\pi} + \frac{2e}{\pi r}\right).$$

Comparons cette équation à (224), on remarque que le troisième terme entre parenthèses représente l'influence de l'effort longitudinal et de la répartition non linéaire des contraintes. Les erreurs, dues à l'emploi de l'équation (224) au lieu de celle trouvée plus haut, sont portées au tableau 9.

TABLEAU 9

$r/h =$	1	1,5	2	3
$e/r =$	0,090	0,038	0,021	0,009
Erreur en %	15,8	6,7	3,7	1,6

On constate que dans la majorité des cas l'équation approchée (224) est utilisable pour le calcul de M_0 ; l'erreur n'est appréciable que lorsque h tend vers r ou devient supérieure à r.

L'accroissement du diamètre vertical de l'anneau s'obtient par l'équation :

$$\delta = \frac{dU}{dP}.$$

Utilisons l'équation (228) de U et substituons dans celle-ci :

$$M = M_0 - \frac{Pr}{2}(1-\cos\varphi), \qquad N = \frac{P}{2}\cos\varphi, \qquad V = -\frac{P}{2}\sin\varphi,$$

nous trouvons

$$\delta = \frac{Pr^2}{AEe}\left\{\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\left(1 - \frac{e^2}{r^2}\right) + \frac{2e}{r}\left[\frac{2}{\pi}\left(1 - \frac{e}{r}\right) - \frac{\pi}{8}\right] + \frac{\pi\alpha}{4}\frac{E}{G}\frac{r}{e}\right\}.$$

La comparaison avec (226) montre que l'influence des efforts longitudinaux et tranchants sur la valeur de δ est généralement faible [19].

7. Déterminer les moments fléchissants dans l'anneau mince à deux axes de symétrie, soumis à l'action d'une pression interne uniforme p.

Solution. Considérons le quart de l'anneau (fig. 327) de demi-axes a et b. Si M_0 représente le moment statiquement indéterminé en A, le moment fléchissant en une section C de coordonnées x, y est

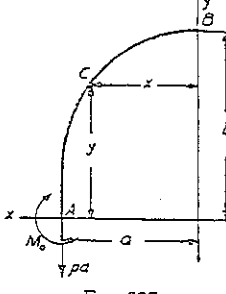


FIG. 327.

$$M = M_0 - pa(a-x) + \frac{p(a-x)^2}{2} + \frac{py^2}{2}$$
$$= M_0 - \frac{pa^2}{2} + \frac{px^2}{2} + \frac{py^2}{2}. \qquad (k)$$

Substituons ceci dans l'équation $dU/dM_0 = 0$, nous trouvons

$$\left(M_0 - \frac{pa^2}{2}\right)s + \frac{p}{2}(I_x + I_y) = 0,$$

où s désigne la longueur du quart de l'anneau et

$$I_x = \int_0^s y^2 ds \qquad \text{et} \qquad I_y = \int_0^s x^2 ds.$$

---

[19] Une solution plus exacte du problème de la figure 320 est donnée par l'auteur dans *Bull. Polytech. Inst. (Kiev)* 1910 ; voir aussi *Phil. Mag.*, vol. 44, p. 1014, 1922 ; et « Théorie de l'élasticité », p. 130, 1961. Cette solution montre que la théorie ci-dessus, fondée sur l'hypothèse suivant laquelle les sections restent planes pendant la flexion, donne des résultats très satisfaisants.

Alors

$$M_0 = \frac{pa^2}{2} - \frac{p}{2s}(I_x+I_y). \qquad (l)$$

Si l'anneau a la forme du chaînon de la figure 326, avec $a=r$ et $b=l+r$, nous obtenons

$$s = b-a+\frac{\pi a}{2},$$

$$I_x = \frac{1}{3}(b-a)^3+\frac{\pi a}{2}(b-a)^2+\frac{\pi}{4}a^3+2a^2(b-a),$$

$$I_y = (b-a)a^2+\frac{\pi a^3}{4}.$$

Substituons dans (l), il vient

$$M_0 = \frac{pa^2}{2} - \frac{p}{2b+(\pi-2)a}\left[\frac{1}{3}(b-a)^3+\frac{\pi}{2}a^3+3a^2(b-a)+\frac{\pi}{2}a(b-a)^2\right].$$

L'équation (k) permet de déterminer le moment fléchissant dans toute autre section.

Les calculs sont plus compliqués lorsque nous avons affaire à un anneau elliptique ([20]). Utilisons les notations $I_x+I_y = \alpha a^2 b$, $M_0 = -\beta pa^2$, et le moment en B (fig. 327) est $M_1 = \gamma pa^2$; les valeurs des coefficients numériques α, β, γ pour différentes valeurs du rapport a/b, sont données au tableau 10.

TABLEAU 10. — CONSTANTES POUR LE CALCUL DES ANNEAUX ELLIPTIQUES

$a/b=$	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3
α . . .	1,571	1,663	1,795	1,982	2,273	2,736	3,559	5,327
β . . .	0	0,057	0,133	0,237	0,391	0,629	1,049	1,927
γ . . .	0	0,060	0,148	0,283	0,498	0,870	1,576	3,128

([20]) Voir J. A. C. H. BRESSE, *Cours de mécanique appliquée*, 3e éd., p. 493, Paris, 1880. Voir aussi H. RÉSAL, *J. math.*, vol. 3, Liouville, 1887 ; M. MARBEC, *Bull. assoc. tech. maritime*, vol. 19, 1908 ; M. GOUPIL, *Ann. ponts et chaussées*, vol. 2, p. 386, 1912 ; MAYER MITA, *Z. Ver. deut. Ing.*, vol. 58, p. 649, 1914 ; W. F. BURKE, *Nat. Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Notes, 444*, 1933.

8. Un *ressort spiral plat* (fig. 328) est fixé en son centre à un axe C. On applique un couple M_0 à l'arbre de manière à remonter le ressort. Ce couple est équilibré par une force horizontale P appliquée à l'extrémité A du ressort et par la réaction de l'axe. Etablir la relation entre M_0 et l'angle de rotation de l'axe, si toutes les dimensions du ressort sont connues. On suppose que l'angle de torsion n'est pas suffisamment grand pour que les spires adjacentes viennent en contact.

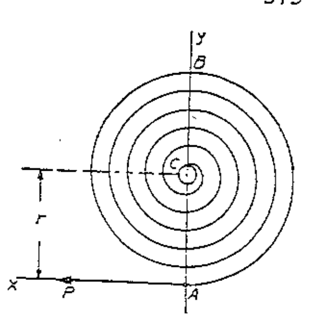


FIG. 328.

Solution. Prenons l'origine des coordonnées en A, le moment fléchissant en un point quelconque du ressort, à une distance y de la force P, est $M = Py$. La variation d'angle entre deux sections très voisines du point considéré est, d'après (214),

$$\Delta d\varphi = \frac{Mds}{EI_z} = \frac{Pyds}{EI_z}.$$

L'angle de rotation total, d'une extrémité du ressort par rapport à l'autre pendant le remontage, est

$$\varphi = \int_0^s \frac{Pyds}{EI_z} = \frac{P}{EI_z}\int_0^s yds. \qquad (m)$$

L'intégrale, à droite de cette équation, représente le moment de la fibre moyenne du ressort par rapport à l'axe x. Ce moment s'obtient en multipliant la longueur totale s de la spirale par la distance comprise entre son centre de gravité et l'axe x. Dans le cas général, il suffit de considérer cette distance égale r, qui représente la distance du centre de l'axe à la force P. L'équation (m) donne alors

$$\varphi = \frac{Prs}{EI_z} = \frac{M_0 s}{EI_z}. \qquad (n)$$

Si l'extrémité A est fixée, le moment M_0 appliqué en C produit une réaction P en cette extrémité fixée. Tant que l'épaisseur du ressort est très faible, que le nombre d'enroulements de la spirale est important et que les spires ne sont pas mises en contact, l'hypothèse, faite plus haut, que la force P reste horizontale, peut être considérée comme suffisamment exacte. Par suite, l'équation (n) reste valable ([21]).

9. Supposons que le ressort de la figure 328 n'est soumis à aucune contrainte et qu'il est fixé en A. Déterminer la contrainte maximum produite et la quantité d'énergie accumulée dans le ressort par trois tours complets de

([21]) Une étude plus complète du problème est développée dans l'ouvrage de R. CASTIGLIANO, *loc. cit.*, p. 212. Voir aussi E. C. WADLOW, *Engineer*, vol. 150, p 474, 1930 ; et J. A. VAN DEN BROEK, *Trans. A.S.M.E.*, vol. 53, p. 247, 1931.

l'axe. Ce dernier est en acier, d'épaisseur 0,06 cm, de largeur 1 cm et de longueur 2,50 m.

Solution. Substituons les données numériques dans l'équation (*n*),

$$6\pi = M_0 \frac{250}{21 \times 10^5 \times (0{,}06)^3},$$

d'où l'on tire $M_0 = 0{,}35$ m · N.

La quantité d'énergie accumulée est

$$U = \int_0^s \frac{M^2 ds}{2\,EI} = \frac{P^2}{2\,EI}\int_0^s y^2 ds = \frac{P^2}{2\,EI}\left(sr^2 + \frac{sr^2}{4}\right)$$

$$= \frac{5}{8}\frac{M_0{}^2 s}{EI} = 4{,}15 \text{ m} \cdot \text{N}.$$

La contrainte de flexion est maximum au point *B*, où le moment fléchissant est égal à $2\,Pr = 2\,M_0$, si bien que $\sigma_{max} = 8\,260$ bars.

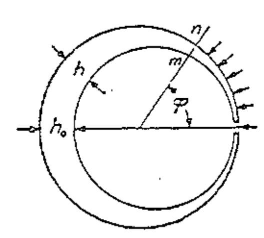


Fig. 329.

10. Un *segment de piston* à contour extérieur circulaire a une section rectangulaire constante de largeur *b* et de hauteur variable *h* (fig. 329). Etablir la loi de variation de la hauteur afin d'obtenir un anneau qui, lorsqu'il est assemblé au piston dans le cylindre, produit une répartition uniforme de la pression sur la paroi du cylindre.

Solution. Soit *r* le rayon intérieur du cylindre et $r+\delta$ le rayon extérieur de l'anneau non contraint. On obtient une solution approchée du problème en utilisant le rayon extérieur de l'anneau au lieu du rayon de courbure variable de sa fibre moyenne. On trouve alors, à l'aide de (214), la variation de courbure due à la flexion

$$\frac{\Delta d\varphi}{ds} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r+\delta} = -\frac{M}{EI}. \qquad (o)$$

Le moment fléchissant *M* en une section quelconque *mn* de l'anneau, produit par la pression *p* uniformément répartie sur la surface extérieure de cet anneau, est

$$M = -2\,pbr^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}. \qquad (p)$$

Si l'on remplace *M* par sa valeur tirée de (*o*), *I* par $bh^3/12$ et, pour les faibles valeurs de δ, si l'on utilise δ/r^2 au lieu de $(1/r)-1/(r+\delta)$, on obtient alors l'équation :

$$\frac{\delta}{r^2} = \frac{p}{E}\frac{24\,r^2}{h^3}\sin^2\frac{\varphi}{2}. \qquad (q)$$

d'où l'on tire

$$h^3 = \frac{p}{E}\frac{24\,r^4}{\delta}\sin^2\frac{\varphi}{2}. \qquad (r)$$

Soit $\varphi = \pi$, désignée par h^3, la valeur maximum de h_0^3, est

$$h_0^3 = \frac{p}{E}\frac{24\,r^4}{\delta}. \qquad (s)$$

La contrainte de flexion maximum, en une section quelconque *mn*, est

$$\sigma = \frac{M}{Z} = \frac{12\,pr^2\sin^2(\varphi/2)}{h^2}. \qquad (t)$$

D'après (*t*) et (*r*) on constate que la contrainte de flexion est maximum pour $\varphi = \pi$, c'est-à-dire, dans une section opposée à la fente de l'anneau. Remplaçons *h* par h_0 et φ par π dans l'équation (*t*),

$$\sigma_{max} = \frac{12\,pr^2}{h_0^2}, \qquad (u)$$

d'où l'on tire h_0 si la contrainte d'utilisation de l'anneau et la pression *p* sont connues. La valeur de δ s'obtient en portant la valeur de h_0 dans (*s*).

On remarquera que si l'on applique deux tractions *P* égales et opposées, tangentiellement aux extrémités de l'anneau sur la fente, elles produisent, en une section quelconque *mn*, le moment fléchissant

$$-Pr(1-\cos\varphi) = -2\,Pr\sin^2\varphi/2,$$

c'est-à-dire que le moment fléchissant varie avec φ exactement de la même manière que dans l'équation (*p*). Donc, si les extrémités de l'anneau ouvert sont tirées ensemble, et si dans cette condition, l'anneau est travaillé au rayon extérieur, cet anneau, lorsqu'il est assemblé, produit une pression uniforme contre la paroi du cylindre [22].

Déterminer, par exemple, δ et h_0 pour un segment de piston en fonte sachant que $r = 25$ cm, $\sigma_W = 280$ bars, $p = 10$ hectobars et $E = 1 \times 10^4$ hectobars. Substituons dans l'équation (*u*), nous trouvons $h_0 = 1{,}58$ cm. D'après l'équation (*s*), $\delta = 0{,}28$ cm.

11. Etablir la formule (227) de la page 364.

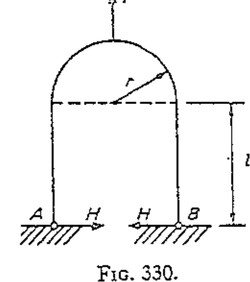


Fig. 330.

12. Un cadre se composant de deux barres verticales et d'un élément semi-circulaire (fig. 330) est soumis à une force *P* dirigée suivant l'axe de symétrie du cadre. Trouver la réaction horizontale *H* et le moment fléchissant *M* au point d'application de la force *P*, en supposant que le cadre a une section constante et qu'il est articulé aux appuis *A* et *B*. On

---

[22] Cette théorie est due à H. Résal, *Ann. mines*, vol. 5, p. 38, 1874 ; *Compt. rend.*, vol. 73, p. 542, 1871. Voir aussi E. Reinhardt *Z. Ver. deut. Ing.*, vol. 45, p. 232, 1901 ; H. Friedmann *Z., österr. Ing. Architekt.-Ver.*, vol. 60, p. 632, 1908 et *Z. Ver. deut. Ing.*, vol. 68, p. 254, 1924. En ce qui concerne les anneaux, voir N. J. Hoff, « Edge Reinforcements of Cutouts in Monocoques », *J. Appl. Mech.*, vol. 10, p. 161, 1943.

néglige l'influence des efforts longitudinaux et tranchants sur la déformation.

Solution. La valeur des forces H s'obtient par l'équation :

$$\frac{dU}{dH} = 0.$$

Ce résultat peut s'écrire sous la forme

$$H = k_1 P, \qquad M = k_2 Pr, \qquad (v)$$

où k_1 et k_2 sont des coefficients numériques dépendant de la valeur du rapport l/r. Plusieurs valeurs de ces coefficients sont données au tableau 11.

TABLEAU 11

$l/r =$	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0
$k_1 =$	0,0984	0,0857	0,0754	0,0669	0,0598	0,0537	0,0486	0,0442	0,0403	0,0370
$k_2 =$	0,284	0,294	0,304	0,313	0,321	0,328	0,335	0,341	0,347	0,352

13. Résoudre le problème précédent en supposant que les appuis A et B du cadre sont encastrés.

Réponse. Les valeurs H et M sont données par les formules (v). Les valeurs numériques des coefficients k_1 et k_2 sont données au tableau 12.

TABLEAU 12

$l/r =$	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0
$k_1 =$	0,1659	0,1459	0,1295	0,1157	0,1040	0,0941	0,0855	0,0781	0,0716	0,0659
$k_2 =$	0,2479	0,2590	0,2691	0,2784	0,2870	0,2948	0,3021	0,3067	0,3152	0,3211

On remarque que l'encastrement des extrémités du cadre réduit quelque peu le moment fléchissant maximum M par rapport au problème précédent.

Les résultats obtenus permettent d'analyser les contraintes dans le maillon de chaîne de la figure 326, à condition d'insérer un goujon pour prévenir toute variation de la dimension horizontale du chaînon.

14. Trouver le moment fléchissant M_0 et l'effort de traction H dans la section A de l'anneau circulaire symétriquement chargé de la figure 331.

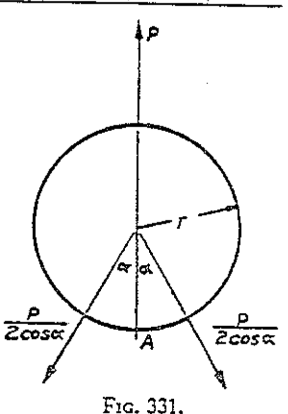


FIG. 331.

Réponse.

$$H = P \cdot \frac{\pi-\alpha}{2\pi} \operatorname{tg}\alpha, \quad M_0 = -\frac{Pr}{2\pi}[1+\sec\alpha-(\pi-\alpha)\operatorname{tg}\alpha].$$

81. Arc articulé aux extrémités

La figure 332 montre un arc articulé à ses extrémités, situées dans le même plan, et supportant une charge verticale. Les composantes verticales des réactions A et B peuvent être déterminées par les équations d'équilibre de la même façon que pour une poutre en appui simple, et les composantes horizontales doivent être égales et de sens opposés. La valeur H de ces composantes s'appelle *poussée de l'arc*. Elle ne peut être déterminée statiquement, mais peut être obtenue à l'aide du théorème de

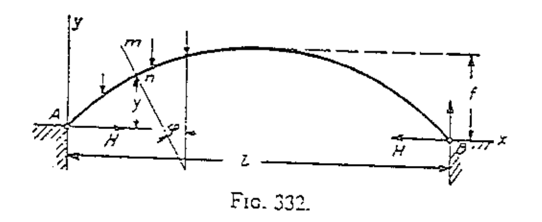


FIG. 332.

Castigliano. Dans le cas d'un arc plat, les deux derniers termes de l'expression générale (228) de l'énergie de déformation peuvent être négligés et, pour les proportions habituelles données aux arcs, on peut remplacer le produit Aer par le moment d'inertie I_z de la section. L'équation permettant de calculer H est

$$\frac{dU}{dH} = \frac{d}{dH}\int_0^s \left(\frac{M^2}{2EI_z} + \frac{N^2}{2AE}\right) ds = 0. \qquad (a)$$

Le moment fléchissant d'une section quelconque mn de l'arc est

$$M = M_0 - Hy, \qquad (b)$$

où M_0 désigne le moment fléchissant calculé pour la section correspondante d'une poutre en appui simple supportant la même charge et ayant même portée que l'arc. Le second terme sous le signe d'intégration de l'équation (a) représente l'énergie de déformation due à la compression dans la direction tangentielle et n'a qu'une importance secondaire. On obtient une approximation satisfaisante pour les arcs plats en supposant

que cette compression est égale à la poussée H. Substituons l'expression (b) et $N = H$ dans l'équation (a), nous écrivons

$$-\int_0^s \frac{(M_0 - Hy)y\,\mathrm{d}s}{EI_z} + \int_0^s \frac{H\,\mathrm{d}s}{AE} = 0,$$

d'où l'on tire

$$H = \frac{\int_0^s \frac{M_0 y\,\mathrm{d}s}{EI_z}}{\int_0^s \frac{y^2\,\mathrm{d}s}{EI_z} + \int_0^s \frac{\mathrm{d}s}{AE}}. \tag{229}$$

Pour un arc de section constante, l'équation (229) devient, si l'on utilise la notation $k^2 = I_z/A$,

$$H = \frac{\int_0^s M_0 y\,\mathrm{d}s}{\int_0^s y^2\,\mathrm{d}s + k^2 \int_0^s \mathrm{d}s}. \tag{230}$$

Le second terme du dénominateur représente l'effet du raccourcissement de la fibre moyenne de l'arc, dû à la compression longitudinale. Le plus souvent cet effet est faible et donc négligeable. D'où

$$H = \frac{\int_0^s M_0 y\,\mathrm{d}s}{\int_0^s y^2\,\mathrm{d}s}. \tag{231}$$

Prenons, par exemple, le cas d'un arc parabolique soumis à une charge continue uniformément répartie sur toute la portée, et dont l'équation de la fibre moyenne s'exprime par

$$y = \frac{4fx(l-x)}{l^2}. \tag{c}$$

Alors

$$M_0 = \frac{q}{2}x(l-x). \tag{d}$$

Substituons (c) et (d) dans l'équation (231), nous obtenons

$$H = \frac{ql^2}{8f}. \tag{e}$$

La poussée réelle H est inférieure à celle obtenue par l'équation (e). Pour fixer les idées sur l'erreur absolue ΔH, on donne, au tableau 13, quelques

valeurs de l'erreur relative $(\Delta H)/H$ pour différentes proportions d'arcs ([23]). On a utilisé, pour établir ce tableau, l'expression complète (228) de

TABLEAU 13

$\frac{f}{l} =$	$\frac{1}{12}$			$\frac{1}{8}$			$\frac{1}{4}$		
$\frac{h}{l} =$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{30}$
$\frac{\Delta H}{H}$	0,1771	0,0513	0,0235	0,0837	0,0224	0,0101	0,0175	0,00444	0,00198

l'énergie de déformation et l'on a supposé que pour toute section de l'arc

$$A = \frac{A_0}{\cos\varphi} \quad \text{et} \quad EI_z = \frac{EI_0}{\cos\varphi},$$

où A_0 et EI_0 sont respectivement l'aire de la section et la rigidité à la flexion de l'arc à la clé, φ désigne l'angle que fait la section avec l'axe y et h représente la hauteur de la section à la clé. On a utilisé l'équation (e) pour calculer la valeur H du rapport $(\Delta H)/H$. Le tableau ci-dessus indique que l'erreur due à l'emploi de (e) n'est appréciable que pour les arcs plats très épais.

Puisque les appuis de l'arc sont situés à une distance fixe l'un de l'autre, une variation de température provoquera des contraintes appréciables dans la structure. Pour calculer la poussée due à une augmentation de la température de t degrés l'on suppose que l'un des appuis est mobile. La dilatation thermique provoquera alors un accroissement de la portée de l'arc égal à $l\alpha t$, où α désigne le coefficient de dilatation thermique du matériau constituant l'arc. La poussée s'obtient alors par la condition suivant laquelle celle-ci empêche un tel accroissement en provoquant un raccourcissement de la portée, égal à αlt. Le théorème de Castigliano permet d'écrire

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}H} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}H}\int_0^s \left(\frac{M^2}{2EI_z} + \frac{N^2}{2AE}\right)\mathrm{d}s = \alpha lt. \tag{f}$$

([23]) Voir l'étude de l'auteur, *Calcul des arcs élastiques*, éd. Béranger, Paris, 1922.

Tenant compte de l'effet thermique uniquement et posant $M_0 = 0$, $N = H$, nous obtenons par (f)

$$H = \frac{\alpha l t}{\int_0^s \frac{y^2 ds}{EI_z} + \int_0^s \frac{ds}{AE}}. \tag{232}$$

On trouvera une étude plus détaillée des contraintes dans les arcs dans les ouvrages traitant de la théorie des constructions.

82. Contraintes dans un volant [24]

En raison de la présence des rayons, la jante d'un volant tournant subit non seulement un allongement mais aussi une flexion. Considérons, comme

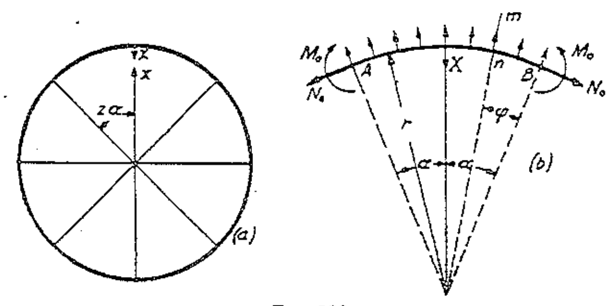


Fig. 333.

étant un corps libre (fig. 333*b*), une partie de la jante comprise entre deux sections bissectrices des angles entre les rayons. Soit

- r = le rayon de la fibre moyenne de la jante,
- A = l'aire de la section de la jante,
- A_1 = l'aire de la section d'un rayon,
- I = le moment d'inertie de la section de la jante,
- 2α = l'angle entre deux rayons consécutifs,
- q = le poids de la jante par unité de longueur de la fibre moyenne,
- q_1 = le poids d'un rayon par unité de longueur,
- ω = la vitesse angulaire du volant.

En raison de la symétrie, il n'y aura pas de contraintes de cisaillement dans les sections A et B, et les forces s'exerçant sur ces sections se réduisent à l'effort longitudinal N_0 et au moment fléchissant M_0. Si X désigne la force

(24) Une étude très complète de la flexion des anneaux circulaires à rayons a été faite par C. B. Biezeno et R. Grammel, *loc. cit.*, p. 381.

exercée par le rayon sur la jante, l'équation d'équilibre de la partie AB de la jante s'écrit :

$$2 N_0 \sin\alpha + X - 2 r^2 \frac{q}{g} \omega^2 \sin\alpha = 0,$$

d'où l'on tire

$$N_0 = \frac{q}{g}\omega^2 r^2 - \frac{X}{2\sin\alpha}. \tag{a}$$

L'effort longitudinal N, dans une section quelconque mn, est

$$N = N_0 \cos\varphi + \frac{q\omega^2 r}{g} 2 r \sin^2\frac{\varphi}{2} = \frac{q\omega^2 r^2}{g} - \frac{X\cos\varphi}{2\sin\alpha}. \tag{b}$$

Le moment fléchissant dans la même section est

$$M = M_0 - N_0 r(1-\cos\varphi) + \frac{q\omega^2 r^3}{g} 2\sin^2\frac{\varphi}{2}$$
$$= M_0 + \frac{Xr}{\sin\alpha}\sin^2\frac{\varphi}{2}. \tag{c}$$

La force X et le moment M_0 ne peuvent être déterminés par les équations de la statique mais peuvent être calculés à l'aide du théorème du travail minimum. L'énergie de déformation de la partie AB de la jante s'écrit [25]

$$U_1 = 2\int_0^\alpha \frac{M^2 r d\varphi}{2EI} + 2\int_0^\alpha \frac{N^2 r d\varphi}{2EA}. \tag{d}$$

L'effort de traction N_1 dans une section quelconque du rayon à la distance ρ du centre du volant est [26]

$$N_1 = X + \frac{q_1\omega^2}{2g}(r^2 - \rho^2).$$

Par suite, l'énergie de déformation du rayon est

$$U_2 = \int_0^r \frac{N_1^2 d\rho}{2A_1 E}. \tag{e}$$

Les équations permettant de calculer M_0 et X sont :

$$\frac{\partial}{\partial M_0}(U_1 + U_2) = 0, \tag{f}$$

$$\frac{\partial}{\partial X}(U_1 + U_2) = 0. \tag{g}$$

(25) On suppose que l'épaisseur de la jante est faible par rapport à r et seule l'énergie de flexion et de traction est prise en considération.

(26) La longueur du rayon est ici égale à r. En pratique, elle est quelque peu inférieure à r.

Portons les équations (*d*) et (*e*) dans (*f*) et (*g*), il vient :

$$M_0 = -\frac{Xr}{2}\left(\frac{1}{\sin\alpha} - \frac{1}{\alpha}\right), \tag{233}$$

$$X = \frac{2}{3}\frac{q\omega^2 r^2}{g} \cdot \frac{1}{\frac{Ar^2}{I}f_2(\alpha) + f_1(\alpha) + \frac{A}{A_1}}, \tag{234}$$

d'où l'on tire :

$$f_1(\alpha) = \frac{1}{2\sin^2\alpha}\left(\frac{\sin 2\alpha}{4} + \frac{\alpha}{2}\right),$$

$$f_2(\alpha) = \frac{1}{2\sin^2\alpha}\left(\frac{\sin 2\alpha}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) - \frac{1}{2\alpha}.$$

Le tableau 14 donne quelques valeurs des fonctions f_1 et f_2 pour différents nombres de rayons.

TABLEAU 14

$n =$	4	6	8
$f_1(\alpha)$	0,643	0,957	1,274
$f_2(\alpha)$	0,00608	0,00169	0,00076

A l'aide de ce tableau, on détermine aisément la force X dans le rayon par l'équation (234) et le moment fléchissant M_0, par l'équation (233). Par suite, l'effort longitudinal et le moment fléchissant, dans une section quelconque *mn* de la jante, s'obtiennent par les équations (*a*), (*b*) et (*c*) [27].

Prenons, par exemple, le cas du volant en acier tournant à 600 tr/mn, de rayon $r = 1{,}50$ m, ayant une section de jante carrée 30×30 cm et comportant six rayons d'aire de section $A_1 = 155$ cm². Si l'on assimile d'abord la jante à un anneau, animé d'un mouvement de rotation, qui se dilate librement, alors la contrainte de traction due à la force centrifuge est d'après la page 31,

$$\sigma_0 = 8 \times 10^{-4} v_1{}^2 = 8 \times 10^{-4} \times \frac{2\pi}{60} \times 600 \times 5^2.$$

[27] La théorie ci-dessus fut développée par R. BREDT, *Z. Ver. deut. Ing.*, vol. 45, p. 267, 1901 ; et H. BRAUER, *Dinglers Polytech. J.*, p. 353, 1908. Voir aussi J. G. LONGBOTTOM, *Proc. Inst. Mech. Engrs. (London)*, p. 43, 1924 ; et K. REINHARDT, *Forschungsarb., No. 226*, 1929. Le même problème surgit lors du calcul des contraintes dans les anneaux de retenue des grandes turbogénératrices ; voir E. SCHWERIN, *Electrotech. Z.*, p. 40, 1931.

Dans le cas de six rayons, $\alpha = 30°$, $f_1(\alpha) = 0{,}957$, $f_2(\alpha) = 0{,}001\,69$. La force dans chaque rayon, d'après l'équation (234), est alors

$$X = \frac{2}{3}\frac{q\omega^2 r^2}{g} \cdot \frac{1}{300 + 0{,}001\,69 + 0{,}957 + 6} = 0{,}089\,3\frac{q\omega^2 r^2}{g}.$$

L'effort longitudinal dans la section bissectrice de l'angle entre les rayons est, d'après l'équation (*a*),

$$N_0 = \frac{q\omega^2 r^2}{g} - 0{,}089\,3\frac{q\omega^2 r^2}{g} = 0{,}911\frac{q\omega^2 r^2}{g}.$$

Le moment fléchissant dans la même section, d'après (233), s'écrit

$$M_0 = -0{,}004\,02\frac{q\omega^2 r^3}{g}.$$

La contrainte maximum dans cette section est

$$\sigma_{max} = \frac{N_0}{A} - \frac{M_0}{Z} = 755 \text{ bars}.$$

Pour la section de la jante, située dans l'axe du rayon, les équations (*b*) et (*c*) donnent

$$(N)_{\varphi=\alpha} = 0{,}923\frac{q\omega^2 r^2}{g}, \qquad (M)_{\varphi=\alpha} = 0{,}007\,94\frac{q\omega^2 r^3}{g}.$$

La contrainte maximum dans cette section est

$$\sigma_{max} = 847 \text{ bars}.$$

Dans ce cas, l'influence de la flexion de la jante sur la contrainte maximum est faible et le calcul des contraintes dans la jante, assimilée à un anneau tournant librement, donne des résultats satisfaisants.

83. Ligne élastique d'une barre à fibre moyenne circulaire

Dans le cas d'une barre courbe mince à fibre moyenne circulaire, l'équation différentielle de la ligne élastique est analogue à celle d'une barre droite (éq. 79, p. 133). Soit *ABCD* (fig. 334) la fibre moyenne d'un anneau circulaire après déformation et soit *u* les faibles déplacements radiaux pendant cette déformation. La variation de courbure de la fibre moyenne pendant la flexion s'étudie en considérant un élément *mn* de l'anneau et l'élément déformé correspondant m_1n_1, compris entre les mêmes rayons (fig. 334*b*). La longueur initiale de l'élément *mn* et sa courbure initiale sont :

$$ds = r\,d\varphi, \qquad \frac{d\varphi}{ds} = \frac{d\varphi}{r\,d\varphi} = \frac{1}{r}. \tag{a}$$

Pour de faibles flèches, la courbure du même élément, après déformation, peut être prise égale à la courbure de l'élément m_1n_1. Cette dernière est donnée par l'équation :

$$\frac{1}{r_1}=\frac{d\varphi+\Delta d\varphi}{ds+\Delta ds}, \qquad (b)$$

où $d\varphi+\Delta d\varphi$ représente l'angle compris entre les sections normales m_1 et n_1 de la barre déformée et $ds+\Delta ds$ la longueur de l'élément m_1n_1. Le déplacement u est positif lorsqu'il se dirige vers le centre de l'anneau et

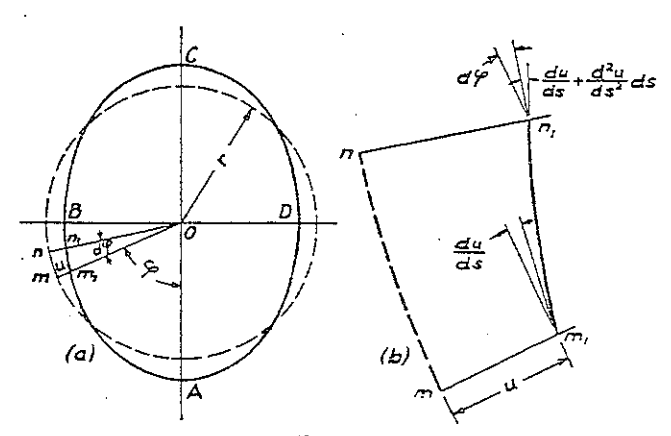


FIG. 334.

il est supposé très petit en comparaison du rayon de l'anneau. Par suite, l'angle compris entre la tangente en m_1 à la fibre moyenne et la normale au rayon m_1O est du/ds. L'angle correspondant à la section n_1 est

$$\frac{du}{ds}+\frac{d^2u}{ds^2}ds.$$

D'où

$$\Delta d\varphi=\frac{d^2u}{ds^2}ds. \qquad (c)$$

En comparant la longueur de l'élément m_1n_1 à celle de l'élément mn, on néglige le petit angle du/ds, et la longueur m_1n_1 est prise égale à $(r-u)d\varphi$. D'où

$$\Delta ds=-ud\varphi=-\frac{uds}{r}. \qquad (d)$$

Substituons (c) et (d) dans (b), nous obtenons

$$\frac{1}{r_1}=\frac{d\varphi+\frac{d^2u}{ds^2}ds}{ds\left(1-\frac{u}{r}\right)},$$

ou, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur.

$$\frac{1}{r_1}=\frac{d\varphi}{ds}\left(1+\frac{u}{r}\right)+\frac{d^2u}{ds^2}=\frac{1}{r}\left(1+\frac{u}{r}\right)+\frac{d^2u}{ds^2},$$

d'où l'on tire

$$\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r}=\frac{u}{r^2}+\frac{d^2u}{ds^2}. \qquad (e)$$

La relation entre la variation de courbure et la valeur du moment fléchissant pour les barres minces est, d'après (214),

$$\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r}=-\frac{M}{EI}. \qquad (f)$$

Le signe moins du second membre de l'équation découle du signe du moment fléchissant qui est positif lorsqu'il produit une diminution de la courbure initiale de la barre (fig. 308). D'après (e) et (f), nous avons

$$\frac{d^2u}{ds^2}+\frac{u}{r^2}=-\frac{M}{EI}. \qquad (235)$$

C'est l'équation différentielle de la ligne élastique d'une barre mince à fibre moyenne circulaire. Pour r infiniment grand cette équation est semblable à l'équation (79) des barres droites.

Considérons, comme exemple d'application de l'équation (235), le problème de la figure 320. Le moment fléchissant d'une section quelconque m_1n_1 est, d'après l'équation (c) page 363,

$$M=\frac{Pr}{2}\left(\cos\varphi-\frac{2}{\pi}\right),$$

et l'équation (235) devient

$$\frac{d^2u}{ds^2}+\frac{u}{r^2}=\frac{Pr}{2\,EI}\left(\frac{2}{\pi}-\cos\varphi\right)$$

ou

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2}+u=\frac{Pr^3}{2\,EI}\left(\frac{2}{\pi}-\cos\varphi\right).$$

La solution générale de cette équation est

$$u = A\cos\varphi + B\sin\varphi + \frac{Pr^3}{EI\pi} - \frac{Pr^3}{4\,EI}\varphi\sin\varphi.$$

Les constantes d'intégration A et B sont déterminées par la condition de symétrie :

$$\frac{du}{d\varphi} = 0, \qquad \text{pour } \varphi = 0 \text{ et } \varphi = \frac{\pi}{2},$$

qui est satisfaite en prenant

$$B = 0, \qquad A = -\frac{Pr^3}{4\,EI}.$$

D'où

$$u = \frac{Pr^3}{EI\pi} - \frac{Pr^3}{4\,EI}\varphi\sin\varphi - \frac{Pr^3}{4\,EI}\cos\varphi.$$

Pour $\varphi = 0$ et $\varphi = \pi/2$, nous avons

$$(u)_{\varphi=0} = \frac{Pr^3}{EI}\left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{4}\right), \qquad (u)_{\varphi=\pi/2} = \frac{Pr^3}{EI}\left(\frac{1}{\pi} - \frac{\pi}{8}\right).$$

Ces résultats concordent parfaitement avec les équations (226) et (227) obtenues à l'aide du théorème de Castigliano ([28]).

84. Flexion des tubes courbes

Nous avons supposé, lors de l'étude de la répartition des contraintes de flexion dans les barres courbes (§ 77), que la forme de la section restait inchangée. Une telle hypothèse se justifie tant que nous avons affaire à une barre pleine, du fait que de très faibles déplacements dans le plan de la section, dus aux contractions et dilatations latérales, n'ont pas d'effets appréciables sur la répartition des contraintes. Toutefois, les conditions sont totalement différentes dans le cas d'un tube mince, courbe, en flexion. On sait que les tubes courbes, à paroi relativement mince, se révèlent, pendant la flexion, plus flexibles que ne l'aurait laissé imaginer la théorie des barres courbes ([29]). Il faut, dans ce cas, tenir compte de la distorsion de la section pendant la flexion ([30]).

([28]) L'équation (235) de la flèche d'un anneau circulaire a été établie par H. RÉSAL. Voir son *Traité de mécanique générale*, vol. 5, p. 78, 1880. Voir aussi J. BOUSSINESQ, *Compt. rend.*, vol. 97, p. 843, 1883 ; et H. LAMB, *Proc. London Math. Soc.*, vol. 19, p. 365, 1888. Plusieurs exemples d'application de cette équation sont donnés dans une note de R. MAYER, *Z. angew. Math. u. Phys.*, vol. 61, p. 246, 1913 ; voir aussi K. FEDERHOFER, *Wasserkraft u. Wasserwirtsch.*, vol. 38, p. 237, 1943.

Considérons un élément pris entre deux sections très voisines d'un tube circulaire courbe (fig. 335), qui est fléchi par des couples dans la direction indiquée sur la figure. Puisque les efforts de traction sur la face convexe du tube et les efforts de compression sur la face concave ont des résultantes dirigées vers l'axe neutre, les sections circulaires précédentes sont aplaties et deviennent elliptiques. Cet aplatissement de la section affecte la déformation des fibres longitudinales du tube. La fibre extérieure ab prend la position a_1b_1 après la flexion ; soit δ son déplacement vers l'axe neutre. L'allongement total de la fibre est

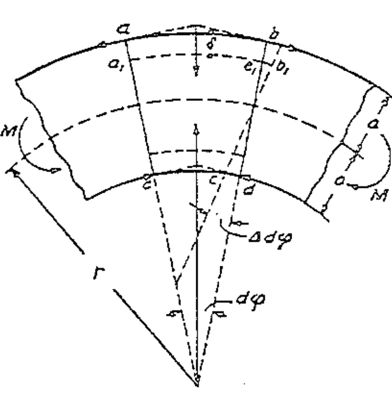


FIG. 335.

$$a_1b_1 - ab = a_1b_1 - a_1e_1 - (ab - a_1e_1). \tag{a}$$

L'angle compris entre les sections voisines ac et bd est désigné par $d\varphi$, sa variation pendant la flexion par $\Delta d\varphi$, le rayon de la fibre moyenne par r et le rayon de la section du tube par a. On suppose que le rapport a/r est suffisamment petit de sorte que l'axe neutre passe par le centre de gravité de la section. D'après la figure, nous obtenons alors

$$a_1b_1 - a_1e_1 = (a - \delta)\Delta d\varphi \approx a\Delta d\varphi. \quad ([31])$$

([29]) Une vaste étude expérimentale sur la flexibilité des coudes a été réalisée par A. BANTLIN, *Z. Ver. deut. Ing.*, vol. 54, p. 45, 1910, et *Forschungsarb. No. 96*. Voir aussi W. HOVGAARD, *J. Math. and Phys.*, vol. 7, 1928 et A. M. WAHL, *Trans. A.S.M.E.*, vol. 49, 1927. Le problème de la flexibilité des coudes est d'une importance pratique pour l'analyse des contraintes dans les canalisations. Les ouvrages récents traitant de ce sujet sont cités dans l'étude de J. E. BROCK, *J. Appl. Mech.*, vol. 19, p. 501, 1952. Voir aussi l'étude de N. GROSS présentée à une conférence de l'Institution of Mechanical Engineers, déc. 1952, Londres.

([30]) Ce problème des tubes circulaires fut étudié par TH. KÁRMÁN, *Z. Verd. deut. Ing.*, vol. 55, p. 1889, 1911. La flexion des tubes de section elliptique fut étudiée par M. T. HUBER. Voir *Proc. 7th Internat. Congr. Appl. Math. Mech.*, vol. 1, p. 322, 1948. L'auteur a étudié le problème des coudes de section rectangulaire ; voir *Trans. A.S.M.E.*, vol. 45, p. 135, 1923.

([31]) Le déplacement δ est supposé très petit en comparaison du rayon a.

L'allongement total de la fibre ab, donné par l'équation (a), est

$$a\Delta d\varphi - \delta d\varphi$$

et l'allongement unitaire est

$$\varepsilon = \frac{a\Delta d\varphi - \delta d\varphi}{(r+a)\, d\varphi} = \frac{a}{r+a}\,\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} - \frac{\delta}{r+a}. \qquad (b)$$

Le premier terme du second membre de cette équation désigne la déformation de la fibre due à la rotation de la section bd par rapport à la section ac. C'est cet allongement qui est pris en considération dans la flexion des barres pleines. Le second terme du second membre de (b) représente l'influence de l'aplatissement de la section. Il est évident que cette influence est d'une grande importance. Prenons, par exemple, $r+a = 1{,}50$ m et $\delta = 0{,}5$ mm. Alors, $\delta/(r+a) = 1/3\,000$ et la contrainte pour un tube d'acier est 7 hectobars. Par suite, un très faible aplatissement de la section produit une diminution appréciable de la contrainte dans la fibre extrême ab. On tirera une conclusion identique pour la fibre cd de la face concave du coude.

Un changement de direction du moment fléchissant provoque un changement de signe des contraintes normales et a comme conséquence un aplatissement suivant la direction perpendiculaire au plan de la figure 335, au lieu d'un aplatissement du tube dans la direction radiale, et ce nouvel aplatissement provoque le déplacement vers l'extérieur de la fibre ab. On démontre, par ce même raisonnement, qu'ici encore l'aplatissement de la section provoque une diminution de la contrainte dans les fibres extrêmes. On peut donc conclure que les fibres les plus éloignées de l'axe neutre n'absorbent pas la part des contraintes indiquée par la théorie habituelle de la flexion. Ceci affecte la flexion du tube de la même manière qu'une diminution de son moment d'inertie. On utilisera pour le calcul des flèches des tubes minces, au lieu de l'équation (214) des barres courbes pleines, l'équation :

$$\Delta d\varphi = \frac{Mr d\varphi}{kEI_z}, \qquad (236)$$

où k est un coefficient numérique, inférieur à l'unité, qui tient compte de l'aplatissement. Ce coefficient dépend des proportions du coude et se calcule à l'aide de la formule approchée [32] :

[32] Voir la note de TH. KÁRMÁN, *loc. cit.*, p. 405.

$$k = 1 - \frac{9}{10 + 12\,(tr/a^2)^2}, \qquad (237)$$

où t désigne l'épaisseur du tube. Cette expression montre que l'aplatissement ne dépend que de la valeur du rapport tr/a^2.

Quant à l'influence de l'aplatissement sur la répartition des contraintes, KARMAN a démontré qu'au lieu de l'équation des contraintes de flexion normales [33] $\sigma = My/I_z$, où y désigne la distance à l'axe neutre, il fallait utiliser l'équation plus compliquée :

$$\sigma = \frac{My}{kI_z}\left(1 - \beta\frac{y^2}{a^2}\right), \qquad (c)$$

où

$$\beta = \frac{6}{5 + 6\,(tr/a^2)^2}.$$

La contrainte maximum, obtenue d'après (c), est

$$\sigma_{max} = k_1 \frac{Md}{2I_z}, \qquad (238)$$

où d désigne le diamètre extérieur du tube et

$$k_1 = \frac{2}{3k\sqrt{3\beta}}$$

représente un coefficient numérique dépendant des proportions du coude. Le tableau 15 donne quelques valeurs de k_1.

TABLEAU 15

$\frac{tr}{a^2}=$	0,3	0,5	1,0
$k_1=$	1,98	1,30	0,88

On constate que lorsque tr/a^2 est petit, la contrainte maximum réelle est

[33] On suppose que r est grand en comparaison de a et que l'hypothèse d'une répartition linéaire des contraintes est suffisamment exacte.

beaucoup plus grande que celle donnée par la théorie usuelle, laquelle néglige l'aplatissement de la section.

On peut développer une théorie analogue à celle-ci dans le cas d'un tube de section rectangulaire ([34]). Par exemple, dans le cas d'un tube mince de section carrée le coefficient k de l'équation (236) dépend du rapport

$$n = \frac{b^4}{r^2 t^2},$$

où t désigne l'épaisseur de la paroi, r le rayon de la fibre moyenne du coude et b la longueur du côté de la section. Par suite,

$$k = \frac{1 + 0{,}0270\,n}{1 + 0{,}0656\,n}. \tag{239}$$

Par exemple, si $b/r = 0{,}1$ et $b/t = 50$, nous obtenons $n = 25$ et, d'après (239), $k = 0{,}63$. La contrainte maximum dans les tubes de section rectangulaire augmente dans le même rapport que la flexibilité, c'est-à-dire que dans l'exemple ci-dessus la distorsion de la section augmente la contrainte maximum d'environ 60 pour cent ([35]).

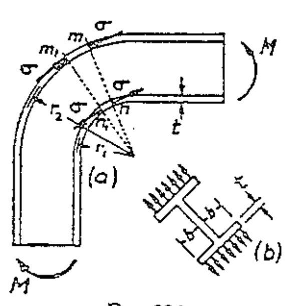


Fig. 336.

Si la section d'une barre courbe a des ailes de grande largeur, la question de la distorsion de la section devient d'une importance pratique. Nous rencontrons ce problème dans le cas de l'étude des contraintes de flexion dans l'angle d'un cadre rigide de section I (fig. 336a). Considérons un élément du cadre pris entre deux sections consécutives mn et m_1n_1, nous remarquons que les contraintes de flexions longitudinales σ dans les ailes ont des composantes dirigées suivant une direction radiale et qui tendent à créer une flexion des ailes (fig. 336b). Cette flexion a pour résultat de réduire quelque peu la contrainte de flexion longitudinale σ dans les parties des ailes éloignées de l'âme. Pour tenir compte de ce fait, on usera d'une *largeur effective* αb de l'aile en appliquant la formule (i), page 355, à une section I. Naturellement la valeur du facteur α,

([34]) Ce cas se présente, par exemple, pour le calcul d'une grue Fairbairn.

([35]) Pour un développement approfondi de la théorie de la flexion des tubes courbes, voir L. Beskin, *J. Appl. Mech.*, vol. 12, 1945 ; E. Reissner, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, vol. 35, p. 204, 1949 ; R. A. Clark, T. I. Gilroy et E. Reissner, *J. Appl. Mech.*, vol. 19, 1952.

définissant la largeur effective de l'aile, dépend de la flexibilité des ailes exprimée par la quantité

$$\beta = 1{,}32\,\frac{b}{\sqrt{tr}}, \tag{d}$$

où t désigne l'épaisseur de l'aile et r son rayon de courbure. Pour l'aile intérieure $r = r_1$ et pour l'extérieure $r = r_2$. Les calculs montrent que si $\beta < 0{,}65$, la flexion des ailes est négligeable et l'on peut appliquer directement la théorie du paragraphe 79. Pour de plus grandes valeurs de β, on se servira plutôt de la formule ([36])

$$\alpha b = \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{2\pi\beta^3}\right) b \tag{e}$$

pour le calcul de la largeur effective d'une aile. Supposons, par exemple, que la largeur de l'aile soit $b = 15$ cm, le rayon correspondant $r = 20$ cm et l'épaisseur $t = 2{,}5$ cm. Par suite, d'après la formule (d), nous obtenons $\beta = 2{,}80$ et la largeur effective de l'aile est $0{,}35 \times 15 = 5{,}25$ cm.

85. Flexion d'une barre courbe hors de son plan de courbure initiale

Dans l'étude précédente nous avons eu affaire à la flexion des barres courbes dans le plan de leur courbure initiale. Toutefois, il existe des cas où les forces s'exerçant sur une barre courbe ne demeurent pas dans le plan de la fibre moyenne de la barre ([37]). Par suite, il faut considérer la

([36]) Pour le calcul de cette formule voir la thèse de doctorat de Otto Steinhardt, Darmstadt, 1938. Les expériences faites par Steinhardt concordent avec la formule.

([37]) Plusieurs problèmes de cette sorte ont été étudiés par I. Stutz, *Z. österr. Architekt. u. Ing.-Ver.*, p. 682, 1904 ; H. Müller-Breslau, *Die neueren Methoden der Festigkeitslehre*, 2e éd., p. 258, 1913 et 4e éd., p. 265 ; et B. G. Kannenberg, *Eisenbau*, p. 329, 1913. Le cas d'un anneau circulaire, en appui sur plusieurs points et soumis à des forces perpendiculaires à son plan, a été étudié par F. Düsterbehn, *Eisenbau*, p. 73, 1920 ; et par G. Unold, *Forschungsarb. No. 225*, 1922. Le même problème a été étudié par C. B. Biezeno en utilisant le principe du travail minimum, *Ingenieur (Utrecht)*, 1927, et *Z. angew. Math. u. Mech.*, vol. 8, p. 237, 1928. L'application de série trigonométrique au même problème est démontrée par Biezeno et J. J. Koch, *ibid.*, vol. 16, p. 321, 1936. Le problème est très important lors du calcul des conduites de vapeur. La bibliographie correspondant à ce sujet est donnée dans une note de H. E. Mayrose, *J. Appl. Mech.*, vol. 4, p. 89, 1937. Voir aussi A. H. Gibson et E. G. Ritchie, *A Study of the Circular-Arc Bow-Girder*, Londres, 1914. On trouvera une étude complète du problème dans l'ouvrage

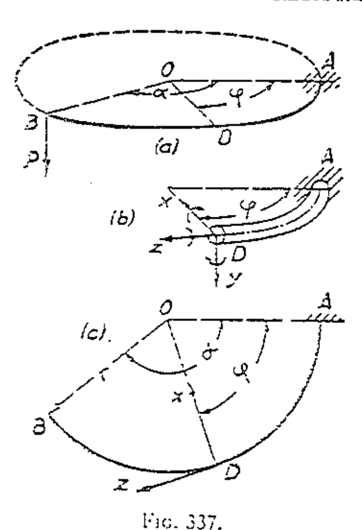


Fig. 337.

flèche de la barre dans des plans perpendiculaires ainsi que la torsion de la barre. La figure 337*a* présente un problème simple de ce genre, où une partie d'un anneau circulaire horizontal, encastré en *A*, est soumise à une charge verticale *P* appliquée à l'extrémité *B* [38]. Considérons une section *D* de la barre et prenons les axes de coordonnées comme indiqué sur les figures 337*b* et 337*c* [39], nous trouvons que les moments de *P* par rapport à ces axes s'expriment par :

$$M_x = -Pr\sin(\alpha-\varphi), \qquad M_y = 0, \qquad M_z = Pr[1-\cos(\alpha-\varphi)]. \tag{a}$$

A l'aide de ces expressions on calcule les contraintes de flexion et de torsion en toute section de la barre. On utilisera, pour calculer la flèche en *B*, le théorème de Castigliano, mais il nous faudra alors connaître l'expression de l'énergie de déformation de la barre. Supposons que les dimensions de la section de celle-ci soient faibles par rapport au rayon *r*, nous appliquons alors les mêmes formules que celles établies pour une barre droite (voir éq. 186 et 190). Donc, l'expression de l'énergie de déformation de la barre est

$$U = \int_0^\alpha \left(\frac{M_x^2}{2EI_x} + \frac{M_z^2}{2C}\right) r\,d\varphi. \tag{b}$$

où *C* désigne la rigidité à la torsion de la barre [40]. La flèche cherchée δ s'obtient par l'équation :

$$\delta = \frac{\partial U}{\partial P}.$$

de Biezeno et R. Grammel, *loc. cit.*, p. 381. Voir aussi les publications de M. B. Hogan dans *Bull. Univ. of Utah*, vol. 34, 1943-1944 ; vol. 35, 1945 et 1947 ; vol. 36, 1947, vol. 38, 1948. On trouvera dans ce dernier une liste de plusieurs publications traitant des anneaux circulaires.

[38] Ce problème a été étudié par Saint-Venant ; voir ses notes dans *Compt. rend.*, vol. 17, 1943.

[39] On suppose que l'axe horizontal *x* et l'axe vertical *y* sont axes de symétrie de la section et que l'axe *z* est tangent à la fibre moyenne de l'anneau en *D*.

[40] Le calcul de *C*, pour différentes formes de section, est étudié au chapitre VII, 2e partie. Pour une étude plus rigoureuse des contraintes dans une portion d'anneau voir « Théorie de l'élasticité », p. 420, 1961.

Remplaçons *U* par son expression (*b*) et remarquons que

$$\frac{\partial M_x}{\partial P} = -r\sin(\alpha-\varphi) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial M_z}{\partial P} = r[1-\cos(\alpha-\varphi)],$$

nous obtenons

$$\delta = \frac{Pr^3}{EI_x}\int_0^\alpha \left\{\sin^2(\alpha-\varphi) + \frac{EI_x}{C}[1-\cos(\alpha-\varphi)]^2\right\} d\varphi. \tag{240}$$

Dans le cas particulier où $\alpha = \pi/2$,

$$\delta = \frac{Pr^3}{EI_x}\left[\frac{\pi}{4} + \frac{EI_x}{C}\left(\frac{3\pi}{4} - 2\right)\right]. \tag{c}$$

Si la section de l'anneau est circulaire, $C = GI_p = 2GI_x$; prenons $E = 2{,}6\ G$, nous avons

$$\delta = \frac{Pr^3}{EI_x}\left[\frac{\pi}{4} + 1{,}3\left(\frac{3\pi}{4} - 2\right)\right] = 1{,}248\,\frac{Pr^3}{EI_x}. \tag{241}$$

Considérons, comme exemple de problème statiquement indéterminé, une barre horizontale semi-circulaire à extrémités encastrées, sollicitée au milieu (fig. 338*a*). Si l'on ne considère que les faibles déformations verticales de la barre, on peut négliger entièrement les déplacements dans le plan horizontal, comme étant des infiniment petits d'ordre supérieur. Par suite, il n'y aura pas de flexion de l'anneau dans son plan et pas de forces ou de moments dans ce plan aux extrémités *A* et *B*. Considérons l'extrémité encastrée *B*, nous concluons, d'après les conditions d'équilibre, qu'il s'y exercera une réaction verticale *P*/2 et le moment $M_{x_0} = Pr/2$. Le moment M_{z_0} s'exercera aussi, empêchant la section *B* de subir une rotation par rapport à l'axe z_0. La valeur de ce moment ne peut être déterminée par la statique. On l'établira à l'aide du principe du moindre travail, qui exige que

$$\frac{\partial U}{\partial M_{z_0}} = 0. \tag{d}$$

Lors du calcul de l'énergie de déformation de la barre, nous avons représenté les moments appliqués à l'extrémité *B* par les vecteurs *Pr*/2 et M_{z_0}, comme l'indique la figure 338*b*. Les moments M_x et M_z dans une section quelconque *D* sont alors

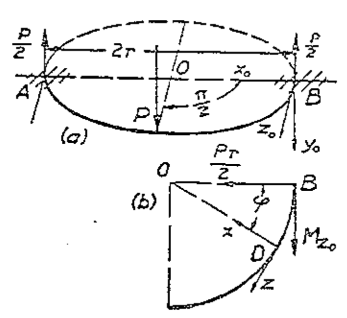


Fig. 338.

$$M_x = \frac{Pr}{2}\cos\varphi - M_{z_0}\sin\varphi - \frac{Pr}{2}\sin\varphi\,, \qquad (e)$$

$$M_z = \frac{Pr}{2}\sin\varphi + M_{z_0}\cos\varphi - \frac{Pr}{2}(1-\cos\varphi)\,, \qquad (f)$$

et l'expression de l'énergie de déformation s'écrit

$$U = 2\int_0^{\pi/2}\left(\frac{M_x^2}{2EI_x} + \frac{M_z^2}{2C}\right) r\mathrm{d}\varphi. \qquad (g)$$

Substituons cette valeur dans (d) et remarquons que

$$\frac{\partial M_x}{\partial M_z} = -\sin\varphi\,, \qquad \frac{\partial M_z}{\partial M_{z_0}} = \cos\varphi\,,$$

nous obtenons

$$\frac{1}{EI_x}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{Pr}{2}\sin^2\varphi + M_{z_0}\sin^2\varphi - \frac{Pr}{2}\sin\varphi\cos\varphi\right)\mathrm{d}\varphi +$$

$$+\frac{1}{C}\int_0^{\pi/2}\left[\frac{Pr}{2}\sin\varphi\cos\varphi + M_{z_0}\cos^2\varphi - \frac{Pr}{2}(1-\cos\varphi)\cos\varphi\right]\mathrm{d}\varphi = 0\,,$$

d'où l'on tire

$$M_{z_0} = \frac{Pr}{2}\left(\frac{2}{\pi} - 1\right) = -0{,}182\,Pr. \qquad (242)$$

Le signe moins indique que la direction de M_{z_0} est opposée à celle portée sur la figure 338*a*. Connaissant M_{z_0}, nous obtenons les moments fléchissant et de torsion dans une section quelconque à partir des expressions (e) et (f).

La flèche est évidemment maximum au droit de la charge et on la détermine sans peine par l'équation de Castigliano :

$$\delta = \frac{\partial U}{\partial P}. \qquad (h)$$

Remplaçons U par sa valeur (g) et remarquons que

$$\frac{\partial M_x}{\partial P} = \frac{r}{2}(\cos\varphi - \sin\varphi),$$

$$\frac{\partial M_z}{\partial P} = \frac{r}{2}(\sin\varphi + \cos\varphi - 1), \qquad (i)$$

nous obtenons

$$\delta = \frac{Pr^3}{2EI_x}\left\{(2-0{,}363)\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) + \frac{EI_x}{C}\left[(2-0{,}363)\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right) + \frac{\pi}{2} - 4 + 0{,}363\right]\right\}$$

$$= 0{,}514\frac{Pr^3}{2EI_x}. \qquad (j)$$

Dans le calcul des dérivées partielles (i), nous avons négligé le fait que le moment de torsion M_{z_0} n'est pas une quantité indépendante mais est une fonction de P, comme le définit l'expression (242). Si l'on tient compte de ceci, le second membre de (h) s'écrit alors sous la forme suivante :

$$\frac{\partial U}{\partial P} + \frac{\partial U}{\partial M_{z_0}}\cdot\frac{\mathrm{d}M_{z_0}}{\partial P}. \qquad (k)$$

Mais, en vertu de l'équation (d), le second terme de cette expression disparaît. Par suite, notre procédé de calcul de la flèche δ est pleinement justifié.

Quelquefois on est amené à considérer des barres courbes dont l'axe n'est pas une courbe dans un plan, nous avons alors affaire à un problème à trois dimensions. On rencontre ce genre de problème, par exemple, dans l'analyse des renforts des bords des vides de monocoques. Ici encore on utilisera avantageusement le théorème de Castigliano [41].

Problèmes

1. Une barre courbe d'axe circulaire, avec $\alpha = \pi/2$ (fig. 337), est sollicitée en son extrémité B par un couple de torsion $M_z = T$. Trouver la flèche en B suivant la verticale.

Réponse. Supposons que

$$EI_x/C = 1{,}3\,, \quad \delta = 0{,}506\frac{Tr^2}{EI_x}.$$

2. Résoudre le problème précédent en supposant que l'extrémité B subit un couple, $M_x = M_0$, appliqué dans le plan tangent vertical à la fibre moyenne en B.

Réponse. $\delta = 1{,}150\dfrac{M_0 r^2}{EI_x}$.

---

[41] Voir l'étude de K. MARGUERRE, *Luftfahrt-Forsch.*, vol. 18, pp. 253-261, 1941 ; et *Nat. Advisory Comm. Aeronaut. Mem. No. 1005*, 1942. Voir aussi N. J. HOFF, *loc. cit.*, p. 394.

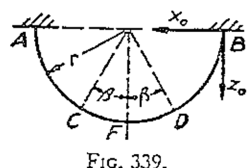


Fig. 339.

3. Une barre semi-circulaire, dont la fibre moyenne est dans un plan horizontal, est encastrée en A et B et sollicitée symétriquement par deux charges P en C et D (fig. 339). Déterminer les moments de torsion M_{z_0} aux extrémités encastrées.

Réponse. $M_{z_0} = -\frac{2}{\pi} Pr\left(\frac{\pi}{2} - \cos\beta - \beta\sin\beta\right)$.

4. Résoudre le problème précédent dans le cas d'une charge uniforme verticale d'intensité q, répartie sur la totalité de la longueur de la barre.

Réponse. $M_{z_0} = -qr^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\right) = -0{,}32\,qr^2$.

5. La barre semi-circulaire horizontale (fig. 339) uniformément chargée comme dans le précédent problème, est en appui sur sa section médiane F. Trouver la réaction verticale N de l'appui F.

Réponse. $N = 2qr$.

APPENDICE A

MOMENT D'INERTIE DES AIRES PLANES

I. Moment d'inertie d'une aire plane par rapport à un axe de son plan

L'étude de la flexion des poutres nous a amenés à nous servir des intégrales du type

$$I_z = \int_A y^2 \, \mathrm{d}A\,, \tag{243}$$

dans laquelle chaque élément d'aire dA est multiplié par le carré de sa distance à l'axe z, l'intégration étant étendue à l'aire A de la section de poutre (fig. 340). Une telle intégrale est appelée *moment d'inertie* de l'aire A par rapport à l'axe z. Dans les cas simples, les moments d'inertie

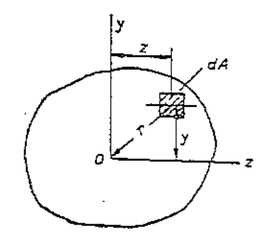



Fig. 340.

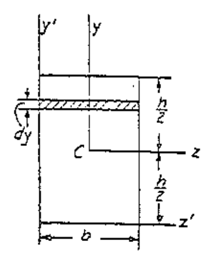


Fig. 341.

se calculent sans peine analytiquement. Prenons, par exemple, un rectangle (fig. 341). Pour obtenir le moment d'inertie de ce rectangle par rapport à l'axe de symétrie horizontale z, on divise le rectangle en éléments infinitésimaux tels que ceux représentés sur la figure par l'aire hachurée. D'où

$$I_z = 2\int_0^{\frac{1}{2}h} y^2 b \, \mathrm{d}y = bh^3/12\,. \tag{244}$$

De la même manière, le moment d'inertie du rectangle par rapport à l'axe y s'écrit

$$I_y = 2\int_0^{\frac{1}{2}b} z^2 h \, \mathrm{d}z = hb^3/12\,.$$

L'équation (244) sert à calculer aussi I_z dans le cas du parallélogramme de la figure 342, car celui-ci peut s'obtenir à partir du rectangle, tracé en tirets, par un déplacement parallèle à l'axe z des éléments identiques à celui représenté sur la figure. L'aire des éléments et leurs distances à l'axe z restent inchangées pendant ce déplacement, si bien que I_z est le même que pour le rectangle.

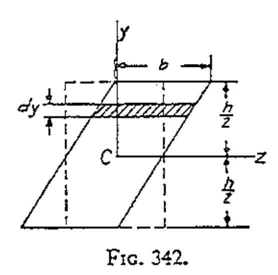


FIG. 342.

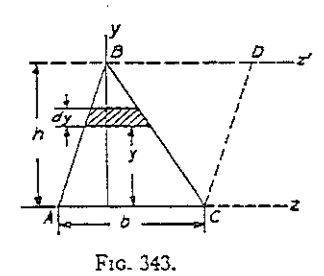


FIG. 343.

Pour calculer le moment d'inertie d'un triangle par rapport à la base (fig. 343), l'aire d'un élément est

$$\mathrm{d}A = b\frac{h-y}{h}\mathrm{d}y$$

et l'équation (243) donne

$$I_z = \int_0^h b\frac{h-y}{h}y^2\mathrm{d}y = bh^3/12.$$

La méthode de calcul ci-dessus peut servir dans la plupart des cas. On obtient le moment d'inertie en divisant la figure en bandes infinitésimales, parallèles à l'axe et en intégrant comme dans l'équation (243).

On simplifie souvent les calculs en divisant la figure suivant des éléments dont les moments d'inertie sont connus. Dans ce cas, le moment d'inertie totale est la somme des moments d'inertie de tous les éléments.

D'après sa définition, l'équation (243), il découle que le moment d'inertie d'une aire par rapport à un axe a la dimension d'une longueur élevée à la quatrième puissance. Par suite, en divisant le moment d'inertie, par rapport à un certain axe, par l'aire de section de la figure on obtient le carré d'une certaine longueur. Cette longueur k est appelée *rayon de giration* par rapport à cet axe. Pour les axes y et z, les rayons de giration sont :

$$k_y = \sqrt{I_y/A}\,, \qquad k_z = \sqrt{I_z/A}\,. \tag{245}$$

Problèmes

1. Trouver le moment d'inertie du rectangle de la figure 341, par rapport à sa base.

Réponse. $I_{z'} = bh^3/3$.

2. Trouver le moment d'inertie du triangle ABC par rapport à l'axe z' (fig. 343).

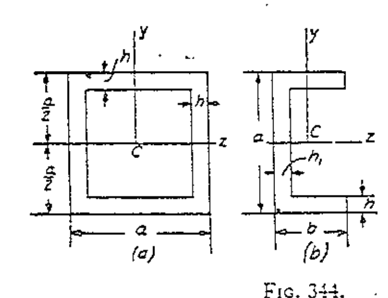
Solution. Ce moment d'inertie est la différence entre le moment d'inertie du parallélogramme $ABCD$ et du triangle BDC. D'où

$$I_{z'} = bh^3/3 - bh^3/12 = bh^3/4.$$

3. Déterminer I_z pour les profils de la figure 344.

Réponse. Pour (a), $I_z = a^4/12-(a-2h)^4/12$; pour (b) et (c),

$$I_z = ba^3/12 - \frac{(b-h_1)(a-2h)^3}{12}.$$



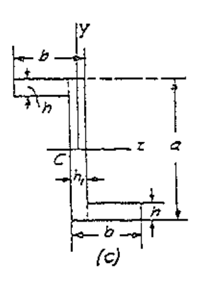


FIG. 344.

4. Trouver le moment d'inertie d'un carré, de côté a, par rapport à une de ses diagonales.

Réponse. $I = a^4/12$.

5. Trouver k_y et k_z pour le rectangle de la figure 341.

Réponse. $k_y = b/2\sqrt{3}$, $k_z = h/2\sqrt{3}$.

6. Trouver k_z pour les figures 344*a* et 344*b*.

II. Moment d'inertie polaire d'une aire plane

Le moment d'inertie d'une aire plane par rapport à un axe perpendiculaire au plan de figure représente le *moment d'inertie polaire* par

rapport au point où l'axe coupe le plan (point O sur la figure 340). Il est défini par l'intégrale

$$I_p = \int_A r^2 \mathrm{d}A, \tag{246}$$

où chaque élément d'aire $\mathrm{d}A$ est multiplié par le carré de sa distance à l'axe, l'intégration est étendue à la totalité de l'aire de la figure.

Se référant à la figure 340, nous avons $r^2 = x^2+y^2$, et d'après (246)

$$I_p = \int_A (y^2+z^2)\,\mathrm{d}A = I_z + I_y. \tag{247}$$

C'est-à-dire que le moment d'inertie polaire par rapport à un point quelconque O est égal à la somme des moments d'inertie par rapport à deux axes perpendiculaires y et z passant par le même point.

FIG. 345.

Considérons une *section circulaire*. Nous rencontrons le moment d'inertie polaire d'un cercle par rapport à son centre lors de la détermination de la torsion d'un arbre circulaire (voir § 61). Si l'on divise l'aire du cercle en anneaux élémentaires minces, comme sur la figure 345, nous avons $\mathrm{d}A = 2\pi r\mathrm{d}r$ et d'après (246),

$$I_p = 2\pi \int_0^{d/2} r^3\,\mathrm{d}r = \pi d^4/32. \tag{248}$$

Et dans ce cas, par raison de symétrie, $I_y = I_z$, par suite, d'après les équations (247) et (248),

$$I_y = I_z = \tfrac{1}{2} I_p = \pi d^4/64. \tag{249}$$

Le moment d'inertie d'une ellipse par rapport à un axe principal z (fig. 346) s'obtient en comparant l'ellipse au cercle représenté par la ligne en tirets sur la figure. La hauteur y d'un élément quelconque de l'ellipse s'obtient en réduisant la hauteur y_1 de l'élément correspondant du cercle dans le rapport b/a. D'après (224), les moments d'inertie de ces deux éléments, par rapport à l'axe z, sont dans le rapport b^3/a^3. Les mo-

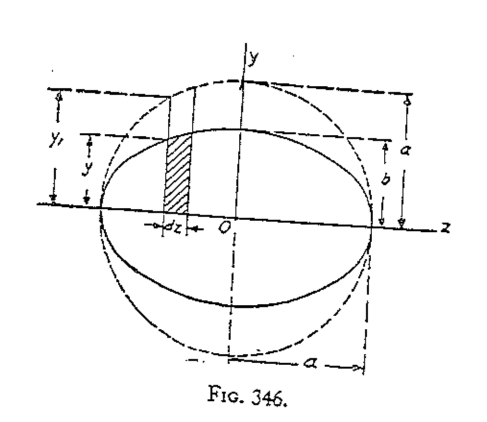


FIG. 346.

ments d'inertie de l'ellipse et du cercle sont évidemment dans le même rapport, par suite, le moment d'inertie de l'ellipse est

$$I_z = \pi (2a)^4/64 \cdot b^3/a^3 = \pi a b^3/4. \tag{250}$$

De la même manière, pour l'axe vertical

$$I_y = \pi b a^3/4,$$

et le moment d'inertie polaire d'une ellipse est, d'après (247),

$$I_p = I_y + I_z = \pi a b^3/4 + \pi b a^3/4. \tag{251}$$

Problèmes

1. Déterminer le moment d'inertie polaire d'un rectangle par rapport à son centre de gravité (fig. 341).

Réponse. $I_p = bh^3/12 + hb^3/12$.

2. Trouver les moments d'inertie polaires par rapport aux centres de gravité des aires des profils de la figure 344.

III. Théorème des axes parallèles

Si l'on connaît le moment d'inertie d'une aire par rapport à un axe z passant par le centre de gravité (fig. 347), le moment d'inertie par rapport

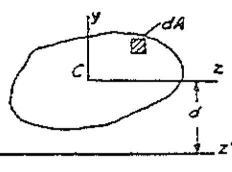


Fig. 347.

à un axe parallèle quelconque z' s'obtient par l'équation suivante, appelée *théorème des axes parallèles* :

$$I_{z'} = I_z + Ad^2, \tag{252}$$

où A désigne l'aire de la figure et d la distance séparant les axes.

Le théorème se démontre aisément à l'aide de l'équation (243) :

$$I_{z'} = \int_A (y+d)^2 \mathrm{d}A = \int_A y^2 \mathrm{d}A + 2\int_A yd\mathrm{d}A + \int_A d^2 \mathrm{d}A .$$

La première intégrale du second membre est égale à I_z, la troisième intégrale est égale à Ad^2 et la seconde s'annule du fait que z passe par le centre le gravité. Par suite, cette équation se réduit à l'équation (252). Cette dernière est spécialement utile pour le calcul des moments d'inertie des sections des poutres composées (fig. 348). Les positions des centres de gravité des cornières standard et les moments d'inertie de leurs sections, par rapport aux axes passant par les centres de gravité, se trouvent dans tous les manuels comportant des tableaux de profilés. On donne, à l'appendice B, une liste abrégée de ces différentes valeurs. A l'aide du théorème des axes parallèles on calcule aisément les moments d'inertie, par rapport à l'axe z, des profilés composés.

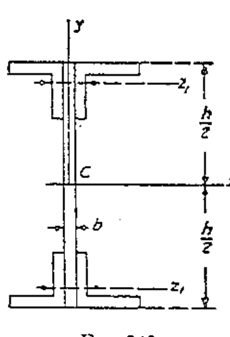


Fig. 348.

Problèmes

1. Calculer, par un changement d'axes, le moment d'inertie d'un triangle (fig. 343) par rapport à l'axe passant par le centre de gravité et parallèle à la base.

Réponse. $I = bh^3/36$.

2. Trouver le moment d'inertie I_z du profilé de la figure 348 sachant que $h = 500$ mm, $b = 12{,}5$ mm et que les cornières ont pour dimensions $100 \times 100 \times 12{,}5$ mm.

3. Déterminer le moment d'inertie par rapport à l'axe neutre de la section ⊔ du problème 2, page 100.

IV. Produit d'inertie. Axes principaux

L'intégrale

$$I_{yz} = \int_A yz\mathrm{d}A, \tag{253}$$

où chaque élément d'aire dA est multiplié par le produit de ses coordonnées et où l'intégration est étendue sur l'aire entière A d'une figure plane, est appelée *produit d'inertie* de la figure. Si une figure possède un axe de symétrie que l'on prend pour axe y ou z (fig. 349), le produit d'inertie est nul. Ceci résulte du fait que, dans ce cas, à tout élément dA

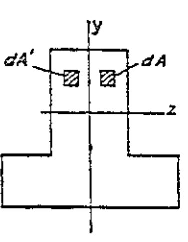


Fig. 349.

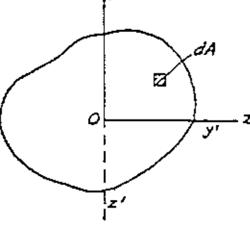


Fig. 350.

à axe positif correspond un élément dA' égal et symétrique situé du côté des z négatifs. Les produits élémentaires correspondants yzdA s'annulent réciproquement et donc l'intégrale (253) disparaît.

Dans le cas général, pour tout point d'une figure plane quelconque, il est possible de trouver deux axes perpendiculaires tels que le produit d'inertie soit nul pour ces axes. Prenons, par exemple, les axes y et z dans le cas de la figure 350. Si les axes tournent de 90° autour de O, dans le sens des aiguilles d'une montre, leurs nouvelles positions sont y' et z'. Il existe alors des relations entre les anciennes et les nouvelles coordonnées de l'élément dA :

$$y' = z, \qquad z' = -y.$$

Par suite, le produit d'inertie relatif aux nouvelles coordonnées est

$$I_{y'z'} = \int_A y'z'\mathrm{d}A = -\int_A yz\mathrm{d}A = -I_{yz}.$$

Donc, pendant cette rotation, le produit d'inertie change de signe. Comme le produit varie constamment avec l'angle de rotation, il existera certaines directions pour lesquelles ce produit est nul. Les axes dans ces directions sont appelés *axes principaux*. On prend généralement le centre de gravité comme origine des coordonnées et les axes principaux correspondants sont alors appelés *axes centraux*. Lorsqu'une figure possède un axe de symétrie, cet axe et un axe qui lui est perpendiculaire sont les axes principaux de la figure, car le produit d'inertie, par rapport à ces axes, est nul, comme nous l'avons expliqué plus haut.

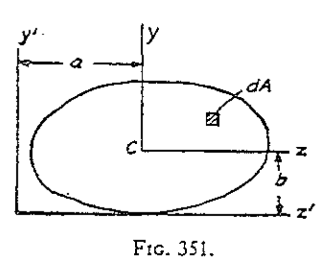


Fig. 351.

Si l'on connaît le produit d'inertie d'une figure pour des axes y et z (fig. 351) passant par le centre de gravité, le produit d'inertie des axes parallèles y' et z' se détermine par l'équation :

$$I_{y'z'} = I_{yz} + Aab. \tag{254}$$

C'est le théorème des axes parallèles pour le produit d'inertie ; on le démontre en remarquant que les coordonnées d'un élément dA, dans le nouveau système d'axes, sont :

$$y' = y + b, \qquad z' = z + a.$$

Donc,

$$I_{y'z'} = \int_A y'z'\mathrm{d}A = \int_A (y+b)(z+a)\,\mathrm{d}A$$

$$= \int_A yz\mathrm{d}A + \int_A ab\mathrm{d}A + \int_A ya\mathrm{d}A + \int_A bz\mathrm{d}A.$$

Les deux dernières intégrales disparaissent puisque C est le centre de gravité et les équations se réduisent à (254).

Problèmes

1. Trouver $I_{y'z'}$ pour le rectangle de la figure 341.

Réponse. $I_{y'z'} = b^2h^2/4$.

2. Trouver le produit d'inertie de la cornière (fig. 352), par rapport aux axes y et z, ainsi que par rapport aux axes y_1 et z_1.

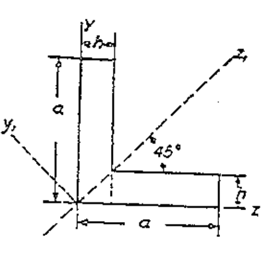


Fig. 352.

Solution. Divisons la figure en deux rectangles et appliquons l'équation (254) à chacun de ces rectangles, nous trouvons

$$I_{yz} = a^2h^2/4 + h^2(a^2 - h^2)/4.$$

Par raison de symétrie $I_{y_1z_1} = 0$.

3. Déterminer les produits d'inertie I_{yz} des profilés de la figure 344, sachant que C désigne le centre de gravité.

Solution. Pour les figures 344a et 344b, $I_{yz} = 0$ par raison de symétrie. Dans le cas de la figure 344c, nous obtenons, en divisant le profilé en trois rectangles et en appliquant (254),

$$I_{yz} = -2(b-h_1)h\left(\frac{a-h}{2}\right)\left(\frac{b}{2}\right).$$

V. Changements de direction des axes. Détermination des axes principaux

Supposons que les moments d'inertie

$$I_z = \int_A y^2\mathrm{d}A, \qquad I_y = \int_A z^2\mathrm{d}A \tag{a}$$

et le produit d'inertie

$$I_{yz} = \int_A yz\mathrm{d}A \tag{b}$$

soient connus et qu'il faille établir les mêmes quantités pour les nouveaux axes y_1 et z_1 (fig. 353). Considérons une aire élémentaire dA, les nouvelles coordonnées de la figure sont :

$$z_1 = z\cos\varphi + y\sin\varphi, \qquad y_1 = y\cos\varphi - z\sin\varphi, \tag{c}$$

où φ désigne l'angle entre z et z_1. Alors,

$$I_{z_1} = \int_A y_1^2\mathrm{d}A = \int_A (y\cos\varphi - z\sin\varphi)^2\,\mathrm{d}A$$

$$= \int_A y^2\cos^2\varphi\mathrm{d}A + \int_A z^2\sin^2\varphi\mathrm{d}A - \int_A 2yz\sin\varphi\cos\varphi\mathrm{d}A,$$

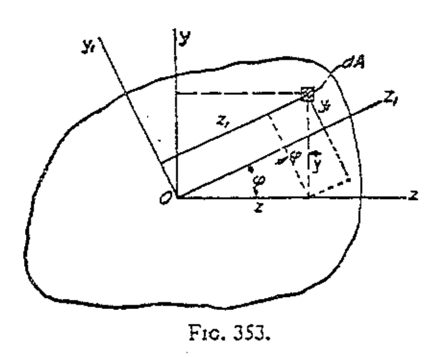


Fig. 353.

ou, en utilisant (*a*) et (*b*),

$$I_{z_1} = I_z \cos^2 \varphi + I_y \sin^2 \varphi - I_{yz} \sin 2\varphi. \tag{255}$$

De la même manière

$$I_{y_1} = I_z \sin^2 \varphi + I_y \cos^2 \varphi + I_{yz} \sin 2\varphi. \tag{255'}$$

Etablissons la somme et la diffrence des équations (255) et (255′), nous trouvons

$$I_{z_1} + I_{y_1} = I_z + I_y \,, \tag{256}$$

$$I_{z_1} - I_{y_1} = (I_z - I_y) \cos 2\varphi - 2\, I_{yz} \sin 2\varphi. \tag{257}$$

Ces équations se révèlent très utiles pour le calcul de I_{z_1} et I_{y_1}. Pour calculer $I_{y_1 z_1}$, nous trouvons

$$I_{y_1 z_1} = \int_A y_1 z_1 \mathrm{d}A = \int_A (y \cos\varphi - z \sin\varphi)(z \cos\varphi + y \sin\varphi)\, \mathrm{d}A$$

$$= \int_A y^2 \sin\varphi \cos\varphi \mathrm{d}A - \int_A z^2 \sin\varphi \cos\varphi \mathrm{d}A + \int_A yz (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\, \mathrm{d}A\,,$$

ou, en appliquant (*a*) et (*b*),

$$I_{y_1 z_1} = (I_z - I_y)\, \tfrac{1}{2} \sin 2\varphi + I_{yz} \cos 2\varphi. \tag{258}$$

Le produit d'inertie est nul pour les axes principaux. Donc, les axes y_1 et z_1 de la figure 353 sont des axes principaux si le second membre de (258) s'annule, ou

$$(I_z - I_y)\, \tfrac{1}{2} \sin 2\varphi + I_{yz} \cos 2\varphi = 0.$$

Ceci donne

$$\mathrm{tg}\, 2\varphi = 2\, I_{yz}/(I_y - I_z). \tag{259}$$

L'équation (259) s'obtient aussi par dérivation de l'équation (255) par rapport à φ et en égalant l'expression obtenue à zéro. Ceci prouve que les moments d'inertie par rapport aux axes principaux sont maximums et minimums.

Déterminons. par exemple, les directions des axes principaux passant par un des angles du rectangle (fig. 341). Dans ce cas,

$$I_{z'} = bh^3/3\,, \qquad I_{y'} = hb^3/3\,, \qquad I_{y'z'} = b^2h^2/4\,.$$

Par suite,

$$\mathrm{tg}\, 2\varphi = \frac{b^2h^2}{2\,(hb^3/3 - bh^3/3)} = 3\, bh/2\,(b^2 - h^2)\,. \tag{d}$$

On détermine la direction de l'angle φ en remarquant que lors du calcul de l'équation (259), cet angle était pris positivement dans le sens inverse des aiguilles d'une montre (fig. 353). L'équation (*d*) donne deux valeurs de φ, différentes de 90°. Celles-ci déterminent les deux directions perpendiculaires des axes principaux. Connaissant les directions des axes principaux, les moments d'inertie correspondants se déterminent par les équations (256) et (257).

Les rayons de giration correspondants aux axes principaux sont appelés *rayons de giration principaux.*

Si y_1 et z_1 représentent les axes principaux d'inertie (fig. 354) et k_{y_1}, k_{z_1} les rayons de giration principaux, l'ellipse, de demi-axes k_{y_1}, k_{z_1} (voir fig.), est appelée *ellipse d'inertie.* A l'aide de cette ellipse, on obtient graphiquement le rayon de giration k_z d'un axe quelconque z, en traçant une tangente à l'ellipse parallèle à z. La distance de l'origine O à cette tangente représente la longueur de k_z. L'ellipse d'inertie donne une idée

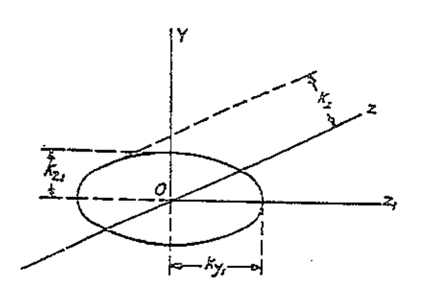


Fig. 354.

de la variation du moment d'inertie en fonction de la rotation de l'axe z dans le plan de la figure autour du point O, et montre que le maximum et le minimum des moments d'inertie sont les moments d'inertie principaux.

On peut aussi construire un cercle de Mohr pour déterminer les moments d'inertie relatifs aux axes obliques. La méthode graphique est entièrement analogue à celle étudiée au chapitre 2 des contraintes. Il suffit de remplacer σ_z, σ_y et τ respectivement par I_z, I_y et I_{yz}.

Problèmes

1. Déterminer les directions des axes centraux du profilé Z (fig. 344*c*), sachant que $h = h_1 = 25$ mm, $b = 125$ mm, $a = 250$ mm.

2. Déterminer les directions des axes centraux et les moments d'inertie principaux correspondants d'une cornière de $125 \times 62{,}5 \times 1{,}25$ mm.

Réponse. $\text{tg}\, 2\varphi = 0{,}547$; $I_{max} = 365{,}60$ cm^4 ; $I_{min} = 38{,}67$ cm^4.

3. Déterminer les demi-axes de l'ellipse d'inertie d'une section elliptique (fig. 346).

Réponse. $k_z = b/2$, $k_y = a/2$.

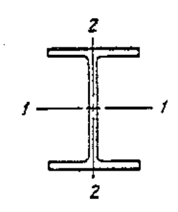
4. Sous quelles conditions l'ellipse d'inertie se transforme-t-elle en un cercle ?

APPENDICE B

TABLEAUX DES PROFILÉS

Les tableaux 16 à 20 comportent quelques propriétés des profilés de construction. Ceux-ci sont incomplets, ils n'ont pour but que de faciliter la résolution de certains problèmes du texte. Nous tenons à remercier l'Office Technique pour l'Utilisation de l'Acier (OTUA) qui nous a autorisés à extraire ces données de son catalogue.

TABLEAU 16. — POUTRELLE H



Profil	Poids	Aire	Hauteur	Aile		Epaisseur de l'âme	Axe 1—1			Axe 2—2		
				Largeur	Epaisseur moyenne		I	Z	k	I	Z	k
	kg/m	cm^2	mm	mm	mm	mm	cm^4	cm^3	cm	cm^4	cm^3	cm
HN												
10	21,02	26,78	100	100	10,5	6	461,4	92,3	4,15	175,5	35,1	2,56
12	25,26	32,18	120	120	10,5	6	829,5	138,2	5,07	302,9	50,5	3,06
14	33,95	43,24	140	140	12	7,25	1 512	216	5,91	550	79	3,57
15	36,67	46,71	150	150	12	7,5	1 889	252	6,35	677	90	3,80
16	44,78	57,04	160	160	14	8	2 615	327	6,77	957	119	4,10
18	51,03	65,00	180	180	14	8,5	3 819	424	7,66	1 363	151	4,58
20	63,62	81,05	200	200	16	9	5 912	591	8,54	2 136	214	5,13
22	70,80	90,19	220	220	16	9,5	8 024	729	9,43	2 843	258	5,61
24	85,78	109,28	240	240	18	10	11 616	968	10,35	4 151	346	6,17
26	93,89	119,60	260	260	18	10,5	15 003	1 154	11,20	5 279	406	6,64
28	110,83	141,18	280	280	20	11	20 597	1 471	12,08	7 323	523	7,20
30	119,85	152,68	300	300	20	11,5	25 687	1 712	12,97	9 009	601	7,68
32	133,40	168,93	320	300	22	12,5	32 161	2 010	13,76	9 909	661	7,64
34	135,36	172,43	340	300	22	12,5	36 834	2 167	14,62	9 909	661	7,58
36	149,08	189,91	360	300	24	13,5	44 996	2 500	15,38	10 813	721	7,54
38	151,20	192,61	380	300	24	13,5	50 797	2 674	16,24	10 813	721	7,49
40	162,31	206,77	400	300	26	13,5	60 466	3 023	17,16	11 714	781	7,52
45	180,29	229,67	450	300	28	14,5	83 964	3 732	19,12	12 619	841	7,41
50	198,71	253,14	500	300	30	15,5	112 822	4 513	21,11	13 524	902	7,31
55	204,80	260,89	550	300	30	15,5	139 852	5 086	23,19	13 526	902	7,20
60	231,82	295,32	600	310	32	17	185 894	6 196	25,07	15 914	1 026	7,33
65	231,17	294,49	650	300	32	16,5	215 944	6 644	27,07	14 436	962	7,00
70	251,88	320,86	700	300	34	17,5	269 238	7 693	28,96	15 345	1 023	6,92
75	258,47	329,61	750	300	34	17,5	314 935	8 398	31,91	15 347	1 023	6,81

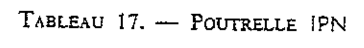
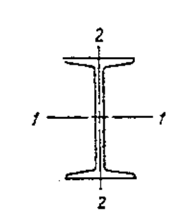
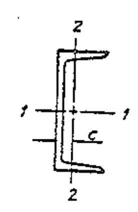


TABLEAU 17. — POUTRELLE IPN



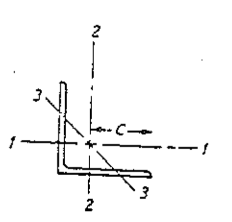
Poids	Aire	Hauteur	Aile		Epaisseur de l'âme	Axe 1—1			Axe 2—2		
			Largeur	Epaisseur moyenne		I	Z	k	I	Z	k
kg/m	cm^2	mm	mm	mm	mm	cm^4	cm^3	cm	cm^4	cm^3	cm
5,95	7,58	80	42	5,9	3,9	77,8	19,5	3,20	6,29	3,00	0,91
8,32	10,6	100	50	6,8	4,5	171	34,2	4,01	12,2	4,88	1,07
11,2	14,2	120	58	7,7	5,1	328	54,7	4,81	21,5	7,41	1,23
14,4	18,3	140	66	8,6	5,7	573	81,9	5,61	35,2	10,7	1,40
17,9	22,8	160	74	9,5	6,3	935	117	6,40	54,7	14,8	1,55
21,9	27,9	180	82	10,4	6,9	1 450	161	7,20	81,3	19,8	1,71
26,3	33,5	200	90	11,3	7,5	2 140	214	8,00	117	26,0	1,87
31,1	39,6	220	98	12,2	8,1	3 060	278	8,80	162	33,1	2,02
36,2	46,1	240	106	13,1	8,7	4 250	354	9,59	221	41,7	2,20
41,9	53,4	260	113	14,1	9,4	5 740	442	10,4	288	51,0	2,32
48,0	61,1	280	119	15,2	10,1	7 590	532	11,1	364	61,2	2,45
54,2	69,1	300	125	16,2	10,8	9 800	653	11,9	451	72,2	2,56
61,1	77,8	320	131	17,3	11,5	12 510	782	12,7	555	84,7	2,67
68,1	86,8	340	137	18,3	12,2	15 700	923	13,5	674	98,4	2,80
76,2	97,1	360	143	19,5	13,0	19 610	1 090	14,2	818	114	2,90
92,6	118	400	155	21,6	14,4	29 210	1 460	15,7	1 160	149	3,13
115	147	450	170	24,3	16,2	45 850	2 040	17,7	1 730	203	3,48
141	180	500	185	27,0	18,0	68 740	2 750	19,6	2 480	268	3,72

Tableau 18. — Profilé en U



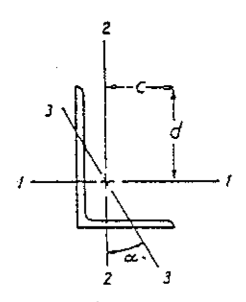
Poids	Aire	Hauteur	Aile: Largeur	Aile: Epaisseur moyenne	Epaisseur de l'âme	Axe 1—1: I	Axe 1—1: Z	Axe 1—1: k	Axe 2—2: I	Axe 2—2: Z	Axe 2—2: k	Axe 2—2: c
kg/m	cm²	mm	mm	mm	mm	cm⁴	cm³	cm	cm⁴	cm³	cm	cm
8,64	11,0	80	45	8	6	106	26,5	3,10	19,4	6,36	1,33	1,45
10,60	13,5	100	50	8,5	6	206	41,2	3,91	29,3	8,49	1,47	1,55
13,35	17,0	120	55	9	7	364	60,7	4,62	43,2	11,10	1,59	1,60
16,00	20,4	140	60	10	7	605	86,4	5,45	62,7	14,80	1,75	1,75
18,85	24,0	160	65	10,5	7,5	925	116,0	6,21	85,3	18,30	1,89	1,84
22,00	28,0	180	70	11	8	1 350	150,0	6,95	114,0	22,40	2,02	1,92
25,30	32,2	200	75	11,5	8,5	1 910	191,0	7,70	148.0	27,00	2,14	2,01
29,40	37,4	220	80	12,5	9	2 690	245,0	8,48	197,0	33,60	2,26	2,14
33,20	42,3	240	85	13	9,5	3 600	300,0	9,22	248,0	39,60	2,42	2,23
37,90	48,3	260	90	14	10	4 820	371,0	9,99	317,0	47,70	2,56	2,36
46,20	58,8	300	100	16	10	8 030	535,0	11,70	495,0	67,80	2,9	2,70

Tableau 19. — Cornières ailes égales



Dimensions	Epaisseur	Poids	Aire	Axe 1—1 et Axe 2—2: I	Axe 1—1 et Axe 2—2: Z	Axe 1—1 et Axe 2—2: k	Axe 1—1 et Axe 2—2: c	Axe 3—3: k_{min}
mm	mm	kg/m	cm²	cm⁴	cm³	cm	cm	cm
70×70	7	7,35	9,36	42,80	8,53	2,14	5,02	1,38
70×70	9	9,29	11,84	53,00	10,70	2,11	4,94	1,37
70×70	11	11,18	14,24	62,50	12,80	2,10	4,86	1,35
80×80	8	9,60	12,23	72,90	12,70	2,44	5,73	1,56
80×80	10	11,83	15,07	88,10	15,60	2,42	5,66	1,55
80×80	12	14,00	17,83	102,00	18,40	2,40	5,59	1,55
90×90	9	12,15	15,48	117,00	18,10	2,75	6,45	1,77
90×90	11	14,66	18,68	139,00	21,80	2,73	6,37	1,77
90×90	13	17,11	21,8	160,00	25,30	2,70	6,30	1,75
100×100	10	15,00	19,11	178,00	24,80	3,05	7,17	1,97
100×100	12	17,80	22,67	208,00	29,40	3,03	7,10	1,95
100×100	14	20,53	26,15	236,00	33,75	3,01	7,01	1,94
120×120	12	21,60	27,51	367,50	42,60	3,66	8,60	2,34
120×120	14	24,96	31,79	435,00	51,50	3,64	8,50	2,34
120×120	15	26,61	33,90	447,00	52,70	3,64	8,49	2,35
150×150	15	33,75	42,99	897,00	84,60	4,59	10,64	2,92
150×150	18	40,03	51,00	1 050,00	99,50	4,55	10,60	2,93

TABLEAU 20. — CORNIÈRES AILES INÉGALES



Dimensions		Epaisseur	Poids	Aire	Axe 1—1				Axe 2—2				Axe 3—3	
					I	Z	k	d	I	Z	k	c	k_{min}	tg α
mm	mm	mm	kg/m	cm^2	cm^4	cm^3	cm	cm	cm^4	cm^3	cm	cm	cm	
30	20	3	1,11	1,42	1,25	0,62	0,94	2,11	0,44	0,29	0,56	1,51	0.42	0,422
35	20	3,5	1,43	1,82	2,15	0,94	1,09	2,27	0,56	0.36	0,56	1,54	0,49	0,255
40	25	4	1,93	2,46	3,93	1,49	1,27	2,63	1,19	0,64	0,70	1,88	0,54	0,381
40	25	5	2,37	3,02	4,50	1,73	1,23	2,60	1,41	0,76	0,69	1,84	0,47	0,380
45	30	4	2,25	2,87	5,78	1,91	1,42	3,02	2,05	0,91	0,85	2,26	0,64	0,436
45	30	5	2,77	3,53	6,99	2 35	1,41	2,78	2,47	1,11	0,84	2,22	0,64	0,430
50	30	5	2,97	3,78	9,36	2,86	1,57	3,27	2.51	1,11	0.81	2,26	0,64	0,352
50	30	6	3,51	4,47	10,91	3,37	1,56	3,23	2.91	1,31	0,81	2,23	0,63	0,347
60	40	5	3,75	4,78	17,20	4,25	1,89	4,05	6,11	2,02	1,13	3,03	0,86	0,437
60	40	6	4,46	5,67	20,10	5,03	1,88	4,00	7,12	2,38	1,12	2,99	0,85	0,433
60	40	7	5,13	6,54	22,90	5,78	1,87	3,96	7,99	2,71	1,10	2,95	0,84	0,428
70	50	6	5,40	6,88	33,40	6,98	2,21	4,78	14.18	3,78	1,43	3,76	1,07	0,452
70	50	7	6,24	7,95	40,04	8,44	2,25	4,74	16,07	4,27	1,42	3,73	1,14	0,448
70	50	8	7,07	9,00	46,90	9,38	2,28	4,68	17,95	4.87	1,41	3.68	1.08	0,463
80	50	6	5,87	7,48	48,50	9,07	2,54	5,35	14,60	3,83	1,39	3,83	1,08	0,386
80	50	7	6,79	8,65	55,36	10,40	2,54	5,39	16,70	4,42	1,39	3,78	1,07	0,382
80	50	8	7,69	9,80	62,39	11,83	2,52	5,27	18,70	4,98	1,38	3,75	1,07	0,381
80	60	7	7,35	9,36	59,00	10,70	2,52	5,50	28,30	6,31	1,73	4,48	1,29	0,545
80	60	8	8,33	10,61	66,30	12,10	2,51	5,47	31,70	7,14	1,71	4,44	1,29	0,542
80	60	10	10,24	13,05	80,31	14,90	2,47	5,37	38,20	8,75	1,71	4,36	1,26	0,540
90	70	8	9,60	12,23	98,00	15,90	2,84	6,17	52,00	10.10	2,07	5,17	1,50	0,590
90	70	10	11,83	15.07	119,00	19,40	2,81	6,10	63,00	12,30	2,04	5,10	1,40	0,580
90	70	12	14,00	17,83	139,90	23,20	2,81	6,03	74,10	14,70	2,04	5,03	1,48	0,572
100	80	9	12,15	15,48	150,00	22,00	3,11	6,95	86,00	14,50	2,35	5,90	1,66	0,620
100	80	11	14,16	18,68	179,00	26,00	3,09	6,90	102,00	17,40	2,33	5,80	1,65	0,620
120	80	10	15,00	19,11	276,00	34,15	3,80	8,08	98,20	16,20	2,27	6,05	1,72	0,435
120	80	12	17,80	22,67	323,00	40,00	3,77	8,00	114,00	19,00	2,25	6,00	1,71	0,430
150	90	11	19,87	25,32	580,00	58,00	4,80	10,00	158,00	23,00	2,50	6,90	1,95	0,360
150	90	13	23,27	29,64	671,00	68,00	4,76	9,90	182,00	26,60	2,48	6,80	1,93	0,350

INDEX DES NOMS D'AUTEURS

INDEX

Imprimerie LOUIS-JEAN, 05002, GAP

Dépôt légal : N° 440 - 4° trim. 1977

Imprimé en France

